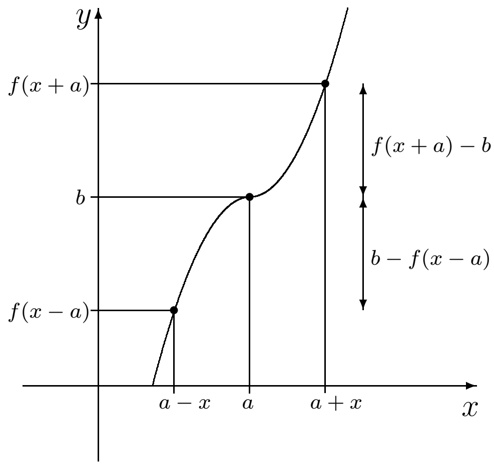
Lösungen weitere Themen (alter LP) — W
Kurvendiskussion: Theorie — 08

1. (a) $a - x$ und $a + x$ sind symmetrisch zu $x = a$ liegende x-Werte. Aus der Zeichnung liest man dann die gegebene Beziehung ab.

   Alternativ kann man auch sagen: Der Mittelwert von $f(x+a)$ und $f(x-a)$ muss b sein:

   $$\frac{f(x+a)+f(x-a)}{2} = b$$

   Diese Beziehung kann durch Umformen aus der gegebenen Beziehung hergeleitet werden.



   (b) Linke Seite: $2 - f(1-x) = 2 - \frac{2(1-x)+5}{(1-x)-1} = 2 - \frac{7-2x}{-x} = 2 + \frac{7-2x}{x} = \frac{2x+7-2x}{x} = \frac{7}{x}$

   Rechte Seite: $f(1+x) - 2 = \frac{(2(1+x)+5}{(1+x)-1} - 2 = \frac{7+2x}{x} - 2 = \frac{7+2x-2x}{x} = \frac{7}{x}$.

   (c) Achsensymmetrie: $f(a+x) = f(a-x)$

2. Man ermittelt zunächst die Vorzeichenbereiche des Bruches $g(x) = \frac{2x+5}{x-1}$

   $g > 0$ $-2{,}5$ $g < 0$ $1 \notin D_g$ $g > 0$

   Da $g(x) \geq 0$ sein muss, folgt für den Definitionsbereich des gegebenen Wurzelausdrucks: $D_f =]-\infty; -2{,}5] \cup]1; \infty[$

3. (a) Polynomdivision: $f(x) = (x^4 - 1) : (x^3 - 1) = x + \frac{x-1}{x^3-1} = \underbrace{x}_{\uparrow} + \underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\to 0 \text{ für } x \to \infty}$

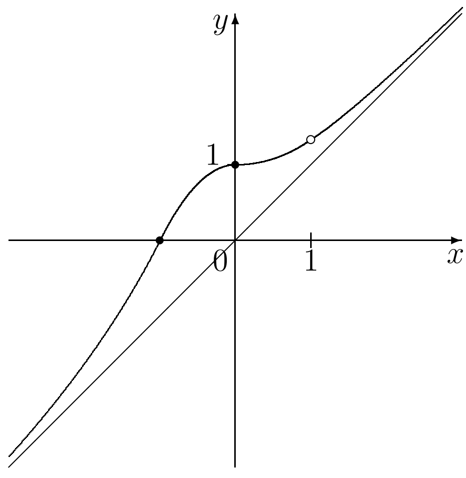
   Die schräge Asymptote hat also die Gleichung $y = x$

   (b) Es ist $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{4}{3}$

   (c) $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$. Also hat $x^4 - 1 = 0$ die Lösungen $x_1 = 1 \notin D$, $x_2 = -1$. Somit ist $x = -1$ die einzige Nullstelle.

   Extrema: Es ist $f'(x) = \frac{x^4+2x^3+3x^2}{(x^2+x+1)^2}$ und somit $f' > 0$ überall außer bei $x = 1$ (Definitionslücke) und $x = 0$. Also liegt bei $x = 0$ ein Terrassenpunkt vor. Extrema gibt es nicht.

   Wendepunkte: Es ist $f''(x) = \frac{6x^5-12x^4+12x^2-6x}{(x^3-1)^3}$ und somit $f'' > 0$ in $]-\infty; -1[\cup]0; 1[\cup]1; \infty[$. Also liegen bei $(-1|0)$ und $(0|1)$ Wendepunkte vor, wobei $(0|1)$ sogar Terrassenpunkt ist.



$W_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$