9. Klasse Lösungen — 9
Quadratische Funktionen: Scheitel — 05

1.

(a) $y = x^2 - 3x - \frac{3}{4} =$
$= (x - 1{,}5)^2 - 2{,}25 - \frac{3}{4} =$
$= (x - 1{,}5)^2 - 3.$ Also $S(1{,}5|-3)$.

(b) $y = -\frac{1}{4}[x^2 - 24x + 44] =$
$= -\frac{1}{4}[(x - 12)^2 - 144 + 44] =$
$= -\frac{1}{4}(x - 12)^2 + 25.$ Also $S(12|25)$.

(c) $0{,}5x^2 + 4x - 24 = 0$ liefert
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4\cdot 0{,}5\cdot 24}}{2\cdot 0{,}5} = -4 \pm 8.$
Mitte, also Scheitel, bei $x = -4$.
y-Wert: $y = 0{,}5(-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 24 = -32.$ Also $S(-4| - 32)$.

2.
$y = -(x - 5)^2 + 2 = -x^2 + 10x - 23$

3.
Wegen $y = 3x^2 - 18x + 27 = 3[x^2 - 6x + 9] = 3(x - 3)^2$ und $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{3}[x^2 - 6x + 9] = \frac{1}{3}(x - 3)^2$ haben beide Parabeln den gleichen Scheitel $S(3|0)$; beide sind nach oben geöffnet, lediglich die erste enger, die zweite weiter.

4.
Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$.
Einsetzen der gegebenen Punkte:
A: $-38 = a - b + c \quad | \cdot (-1)$
B: $-18 = a + b + c \quad | \cdot 1$
C: $\underline{-6 = 9a + 3b + c}$
$20 = 2b$, also $b = 10$.
Einsetzen in obige Gleichungen A und C:
$-38 = a - 10 + c \quad | \cdot (-1)$
$\underline{-6 = 9a + 30 + c \quad | \cdot 1}$
$32 = 8a + 40$, also $-8 = 8a$; $a = -1$.
Einsetzen in $-38 = a - 10 + c$ liefert:
$-38 = -1 - 10 + c$, also $c = -27$.
Die Funktionsgleichung lautet also
$y = -x^2 + 10x - 27$.
Wegen $-x^2 + 10x - 27 = -[x^2 - 10x + 27] = -[(x - 5)^2 + 2] = -(x - 5)^2 - 2$ liegt der Scheitel bei $S(5| - 2)$.

5.

(a)
$$\begin{aligned} 2s &= 1 + 2 + \ldots + 99 + \\ &\underline{+99 + 98 + \ldots + 1 =} \\ &100 + 100 + \ldots + 100 = 100 \cdot 99 = \\ &= 9900; \end{aligned}$$

Also $s = 1 + \ldots + 99 = \frac{9900}{2} = 4950$.

(b)
$$\begin{aligned} 2s &= 1 + \ldots + x + \\ &\underline{+x + \ldots + 1 =} \\ 1 + x + \ldots + 1 + x &= (1 + x) \cdot x; \end{aligned}$$

also $s = 1 + \ldots + x = \frac{x(1+x)}{2}$.

(c) $y = \frac{1}{2}x(x+1)$ hat die Nullstellen $x = 0$, $x = -1$, der Scheitel liegt also in der Mitte bei $x = -\frac{1}{2}$.
y-Wert: $y = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2} + 1) = -\frac{1}{8}$.
Also $S(-\frac{1}{2}| - \frac{1}{8})$.

6.

G: Fläche $A = ab$

N: Ähnlichkeit des ganzen Dreiecks und des schraffierten kleinen Dreiecks liefert die angegebenen Verhältnisse.

A: $b = \frac{29{,}7}{21} \cdot (21 - a)$

D: $A = ab = a \cdot \frac{29{,}7}{21} \cdot (21 - a) =$
$= a(29{,}7 - \frac{29{,}7}{21}a) = -\frac{29{,}7}{21}a^2 + 29{,}7a.$
Umbenennung $a \leftrightarrow x$, $A \leftrightarrow y$ liefert die Funktionsgl. $y = -\frac{29{,}7}{21}x^2 + 29{,}7x$.

E: Die Nullstellen liegen bei $x = 0$ und $x = 21$, Scheitel also bei $x = 10{,}5$. Da die Parabel nach unten geöffnet ist, liegt hier der höchste Punkt, d. h. hier ergibt sich der größte y-Wert (also wie gewünscht die größte Rechtecksfläche). Man wähle also $a = 10{,}5$.