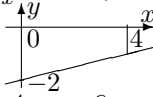


13. Klasse Lösungen	13
Kompakt-Überblick zum Grundwissen	K

1.
 (a) Bruch auseinanderziehen und $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ schreiben: $\int \frac{2x+1}{x^2} dx = \int (\frac{2}{x} + x^{-2}) dx = 2 \ln |x| - x^{-1} + C$
 (b) $\int_0^4 (0,25x - 2) dx = [\frac{1}{8}x^2 - 2x]_0^4 = \frac{1}{8} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 = -6$
 Trapezfläche unterhalb der x -Achse.



2.
 (a) $I(x) = [e^t - \frac{1}{2}t^2]_0^x = e^x - \frac{1}{2}x^2 - 1$,
 $I'(x) = e^x - x$ (klar nach HdI),
 $I''(x) = e^x - 1$, $I''(x) = 0$ ergibt $x = 0$.
 $I'' < 0$ rechts- $I'' > 0$ links-gekrümmt WP(0|0)
 (b) Schnittstellen: $f(x) = g(x)$; $\frac{1}{2}x^3 + x^2 = 0$;
 $x^2(\frac{1}{2}x + 1) = 0$; $x_{1/2} = 0$, $x_3 = -2$
 $\int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^0 (\frac{1}{2}x^3 + x^2) dx$
 $= [\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3]_{-2}^0 = 0 - (2 - \frac{8}{3}) = \frac{2}{3}$

3.
 X ist normalverteilt mit $\mu = 56$ und $\sigma = 1,5$.
 $P(A) = P_{\mu,\sigma}(X > 60) = 0,00383$
 $P(B) = P_{\mu,\sigma}(59,5 < X \leq 60,5) = 0,00847$
 $P(C) = 0$, $P(D) = P_{\mu,\sigma}(X < 55) = 0,25249$
 σ -Regeln: $P_{\mu,\sigma}(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,99$, also $[t_1; t_2] \approx [52,1; 59,9]$

4.
 $AB: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Einsetzen von C (erste Zeile $\lambda = -4$, zweite Zeile $\lambda = -1$), also liegt C nicht auf AB .
 Abstand von $H(2|-7|2)$ von AB : Allg. Geradenpunkt $F(-\lambda|1-2\lambda|4-2\lambda)$. $\vec{HF} \circ \vec{u} = 0$;
 $(-\lambda - 2) \cdot (-1) + (-2\lambda + 8) \cdot (-2) + (-2\lambda + 2) \cdot (-2) = 0$; $\lambda = 2$; Fußpunkt des Lots von H auf g : $F(-2|-3|0)$. Abstand:
 $|\vec{HF}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$

5.
 $\vec{N} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{P})$, also $N(0|0,5|4)$.
 $E_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 6.
 $E_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
 Normalvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, Ansatz $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und Einsetzen von A liefern:

$$E_2: 12x_1 - 12x_2 + 6x_3 - 12 = 0$$

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{144 + 144 + 36} = 18$$

$$\text{HNF: } \frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2) = 0$$

$$P \text{ in HNF: } d(P, E_2) = |\dots| = \frac{2}{3}$$

$$l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Kugelgleichung: } x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 4)^2 = (\frac{2}{3})^2$$

7.
 Ri.vektoren nicht parallel; gleichsetzen:
 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
 Erste Zeile: $-1 + \lambda = -3$, $\lambda = -2$.
 In zweite Zeile: $-2 = 10 + 4\mu$, $\mu = -3$.
 Probe in dritter Zeile stimmt,
 g und h_1 schneiden sich in $(-3|-2|4)$.
 Schnittwinkel φ : $\varphi \approx 65,16^\circ$, denn
 $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{1+1+1} \sqrt{0+16+1}} \approx 0,42$
 8.
 E_3 ist parallel zur x_2 -Achse.
 Achsenpunkte sind $(?|0|0)$, $(0|?|0)$ und $(0|0|?)$, also $(2|0|0)$ mit x_1 -Achse, $(0|0|-\frac{4}{7})$ mit x_3 -Achse, kein Schnitt mit x_2 -Achse.
 Schnittwinkel ψ mit den Achsen: Mit Richtungsvektor $\vec{u}$ der x_1 -Achse und Normalvektor $\vec{n}$ von E_3 , $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$, und
 $\sin \psi = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$ folgt $\psi \approx 15,95^\circ$ mit x_1 -Achse und analog $\psi \approx 74,05^\circ$ mit x_3 -Achse.

9.
 „ E_4 plus $2 \cdot E_5$ “ liefert $7x_1 + 7x_3 = 7$; z. B. $x_1 = \tau$, dann $x_3 = 1 - \tau$, $x_2 = 4 - 2x_1 - 3x_3 = 1 + \tau$, also $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\tau \in \mathbb{R}$.

10.
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 12bx + c$
 Max(0|2) liefert $f(0) = 2$, d. h. $d = 2$
 und $f'(0) = 0$, d. h. $c = 0$
 Min: $f(\frac{4}{3}) = \frac{22}{27}$, d. h. $\frac{64}{27}a + \frac{16}{9}b + \frac{4}{3}c + d = \frac{22}{27}$
 und $f'(\frac{4}{3}) = 0$, d. h. $3 \cdot \frac{16}{9}a + 2 \cdot \frac{4}{3}b + c = 0$
 Der Punkt mit kleinstem Abstand von O sei $P(x|y)$. Suche Minimum von $d(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (x^3 - 2x^2 + 2)^2}$.