

13. Klasse Lösungen	13
Lagebeziehung Gerade – Ebene	08

1.

Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts $(\lambda|9-4\lambda|-7+\lambda)$ liefert:

(a) $\lambda - (9-4\lambda) - 5(-7+\lambda) = 26; 26 = 26$
(wahr); g liegt in E .

(b) $3\lambda + (9-4\lambda) + 2(-7+\lambda) + 8 = 0;$
 $\lambda = -3; g$ und E schneiden sich im Punkt $S(-3|21|-10)$.

Schnittwinkel $\psi: \sin \psi =$

$$\frac{|1 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{1+16+1} \cdot \sqrt{9+1+4}} \approx 0,063; \psi \approx 3,61^\circ.$$

(c) $2\lambda + (9-4\lambda) + 2(-7+\lambda) = 5; -5 = 5;$
 g und E sind echt parallel.

HNF von $E: |\vec{n}| = \sqrt{4+1+4} = 3,$
also $E: \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 + 2x_3 - 5) = 0;$
 $d(g, E) = |\frac{1}{3}(2 \cdot 0 + 9 + 2 \cdot (-7))| = \frac{5}{3}.$

2.

(a) Die Bedingung $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ liefert $2 \cdot 4 + k \cdot 2 + (-5) \cdot (-10) = 0$, also $k = -29$.

(b) Richtungsvektor $\vec{u}$ und Normalvektor $\vec{n}$ müssen Vielfache sein. An der ersten/dritten Koordinate sieht man, dass $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{n}$ sein muss, also $k = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

3.

(a) Einsetzen von s in E_1 bzw. E_2 :
 $-4+4\lambda+2(4-2\lambda) = 4; 4 = 4$ (wahr);
 $3(-4+4\lambda) - 4(-3+3\lambda) = 0; 0 = 0$
(wahr); also liegt s in E_1 und E_2 .

(b) Achsenpunkte A_i von E_1 mit der x_i -Achse: $A_1(4|0|0)$, $A_2(0|?|0)$ existiert nicht, $A_3(0|0|2)$.

Also ist E_1 parallel zur x_2 -Achse, so dass auch die Spurgeraden mit der x_1x_2 -Ebene und mit der x_2x_3 -Ebene in x_2 -Richtung zeigen (siehe Skizze):

$$s_{12}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$s_{13}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R}.$$

$$s_{23}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau \in \mathbb{R}.$$

(Fortsetzung von 3 (b))

Achsenpunkte B_i von E_2 mit der x_i -Achse: $B_1(0|0|0)$, $B_2(0|0|0)$, $B_3(0|0|?)$: Alle Punkte B_3 liegen in E_2 , d. h. E_2 enthält die x_3 -Achse, die somit zugleich Spurgerade mit der x_1x_3 - und der x_2x_3 -Ebene ist:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$$

Für die Spurgerade mit der x_1x_2 -Ebene benötigt man einen weiteren dort in E_2 liegenden Punkt, z. B. mit $(4|3|0)$:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Spurpunkte von s :

Mit x_1x_2 -Ebene

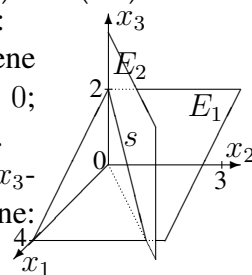
$$x_3 = 0: 4 - 2\lambda = 0;$$

$$\lambda = 2; S_{12}(4|3|0).$$

Analog mit x_1x_3 -

und x_2x_3 -Ebene:

$$S_{13} = S_{23}(0|0|2).$$



4.

$$\text{Lotgerade } l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ in } E:$$

$$9 + \lambda - 3(-5 - 3\lambda) = 4; \lambda = -2; F(7|2|1).$$

$$\text{Spiegelpunkt } P': \overrightarrow{FP'} = \overrightarrow{PF}, \text{ also } \vec{P}' - \vec{F} = \vec{F} - \vec{P}, \text{ also } \vec{P}' = 2\vec{F} - \vec{P}, \text{ also } P'(5|2|7).$$

5.

Bild analog ueb138.pdf. Ansatz für Ebene

durch P senkrecht zu s mit Normalvektor =

Ri.vektor der Geraden: $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = d$.

$$P \text{ einsetzen: } 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-27) = d, d =$$

$$54, \text{ also Ebene: } E: 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 54.$$

$$s \text{ in } E: 4(-4+4\lambda) + 3(-3+3\lambda) - 2(4-2\lambda) =$$

$$54; \lambda = 3 \text{ in } s \text{ einsetzen: } F(8|6|-2).$$

$$\text{Abstand } d(P, g) = |\overrightarrow{PF}| =$$

$$\sqrt{(8-0)^2 + (6-0)^2 + (-2+27)^2} = 5\sqrt{29}$$

6.

Allgemeinen Geradenpunkt in Kugelgleichung einsetzen:

$$(-4+4\lambda)^2 + (-3+3\lambda)^2 +$$

$$(4-2\lambda+27)^2 = 729 \text{ liefert quadratische}$$

Gleichung mit zwei Lösungen für λ .