



13. Klasse Lösungen	13
Lagebeziehung Gerade – Gerade	07

1.

Parallele Ri.vektoren $\vec{u}_h = (-2)\vec{u}_g$.

Aufpunkt von h (1|4|3) liegt nicht auf g (denn $1 = 2 + \lambda$, $4 = 6 + 2\lambda$, $3 = -1 - \lambda$ ergibt aus erster Gleichung $\lambda = -1$ im Widerspruch zur dritten Gleichung).

Also sind g und h echt parallel.

2.

(a) g und h haben gleichen Aufpunkt A , die Ri.vektoren zeigen aber in verschiedene Richtung (nicht Vielfache). Also schneiden sich g, h in $A(3|0|1)$.

(b) g und k haben gleiche Ri.vektoren. Aufpunkt von k (7|7|5) liegt nicht auf g (denn $7 = 3 - 5\lambda$, $7 = 0 - 5\lambda$, $5 = 1 + \lambda$ führt bereits in den ersten beiden Gleichungen zum Widerspruch). Also sind g und k echt parallel.

3.

(a) Ri.vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt

$$-1 + \lambda = 1, -1 = 2 + \mu, 1 - 3\lambda = 4 + 3\mu.$$

Also $\lambda = 2, \mu = -3$, Probe in dritte Gleichung stimmt.

Also schneiden sich g_1 und g_2 .

Schnittpunkt $S(1 | -1 | -5)$.

Schnittwinkel φ aus $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{1+0+9} \cdot \sqrt{0+1+9}} = 0,9$, also $\varphi \approx 25,84^\circ$.

(b) Ri.vektoren $\vec{u}_2, \vec{u}_3$ parallel ($\vec{u}_3 = 2\vec{u}_2$). Aufpunkt von g_3 (2|4|8) eingesetzt in g_2 ergibt bereits in der ersten Zeile $2 = 1 + 0\mu$ einen Widerspruch, also sind g_2 und g_3 echt parallel.

Abstand des g_3 -Aufpunkts $A(2|4|8)$ von der Geraden g_2 :

Fußpunkt X als allg. g_2 -Geradenpunkt ansetzen: $X(1|2 + \mu|4 + 3\mu)$. Bedingung: $\vec{AX} \perp g_2$, also $\vec{AX} \circ \vec{u}_2 = 0$;

$$\begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+\mu-4 \\ 4+3\mu-8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0; \quad \begin{matrix} A \\ \vdots \\ X \end{matrix} \quad \begin{matrix} g_3 \\ \vdots \\ g_2 \end{matrix}$$

$$(-1) \cdot 0 + (-2 + \mu) \cdot 1 + (-4 + 3\mu) \cdot 3 = 0;$$

$$10\mu = 14; \mu = 1,4; \text{ also } X(1|3,4|8,2).$$

(Fortsetzung von Aufgabe 3(b))

Gesuchter Abstand $d(g_2, g_3) = |\vec{AX}|$

$$= \sqrt{(1-2)^2 + (3,4-4)^2 + (8,2-8)^2} = \sqrt{1,4} \approx 1,18.$$

(c) Ri.vektoren $\vec{u}_3 \parallel \vec{u}_4$ ($\vec{u}_4 = -1,5\vec{u}_3$).

Aufpunkt von g_4 (2 | -4 | -16) eingesetzt in g_3 ergibt $2 = 2$, $-4 = 4 + 2\sigma$, $-16 = 8 + 6\sigma$; aus zweiter Gleichung also $\sigma = -4$, Probe in erster Gleichung stimmt sowieso, in dritter Gleichung $-16 = 8 + 6 \cdot (-4)$ stimmt ebenfalls, also sind g_3 und g_4 identisch.

(d) Ri.vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_4$ sind nicht parallel.

Gleichsetzen ergibt $-1 + \lambda = 2$,

$$-1 = -4 - 3\tau, 1 - 3\lambda = -16 - 9\tau.$$

Aus erster und zweiter Gleichung folgen $\lambda = 3$ und $\tau = -1$; Probe in dritter Gleichung $-8 \neq -7$; g_1 und g_4 sind also windschief.

4.

(a) Aufpunkt von g ist D , Richtungsvektor von g ist $\vec{BS} = \begin{pmatrix} -3 - (-6) \\ 3\sqrt{3} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$, also

$$so \ g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Analog } h : \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen liefert $3\lambda = -6 - 3\mu$, $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\lambda = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\mu$, $2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$. Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sqrt{3}$ und Addition der zweiten Gleichung liefert $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\lambda = -4\sqrt{3}$, also $\lambda = -1, \mu = -1$ und somit Schnittpunkt $T(-3 | -\sqrt{3} | 2\sqrt{6})$.

$$(b) \ x_3\text{-Achse: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ri.vektoren nicht parallel. Gleichsetzen: $-4 + 2\sigma = 0, 0 = 0, 2\sqrt{6} = \tau$.

Also $\sigma = 2, \tau = 2\sqrt{6}$, Probe in zweiter Gleichung stimmt. Somit schneiden sich YZ und die x_3 -Achse.