

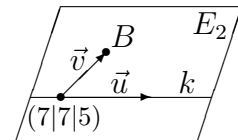
13. Klasse Lösungen	13
Ebenengleichungen, Kugelgleichungen	05

$$1. \quad (a) \quad E_1 : \vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}) + \mu(\vec{C} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Möglich sind auch Lösungen z. B. mit $\vec{X} = \vec{B} + \lambda(\vec{A} - \vec{B}) + \mu(\vec{C} - \vec{B})$).

$$(b) \quad B \text{ in } k: \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{liefert } 5 = 7 - 5\sigma, \text{ also } \sigma = 0,4, \text{ Probe in zweiter Gleichung } 8 = 7 - 5\sigma \text{ Widerspruch, also } B \text{ nicht auf } k.$$

$$E_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



$$(c) \quad E_3 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$(d) \quad E_4 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. (a) Da der erste Richtungsvektor das 4-fache des zweiten ist, zeigen diese in die gleiche Richtung, sind also linear abhängig, sodass keine Ebenengleichung entsteht.

$$(b) \quad P \text{ in } E: \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \begin{array}{ll} I. & 1 = 4 + 2\lambda + \mu \\ II. & -4 = -3 + 4\lambda + \mu \\ III. & 3 = 1 + \lambda \end{array}$$

III./I. ergeben $\lambda = 2$ und $\mu = -9$. Probe in II. stimmt. Also liegt P auf E , wegen $\lambda \notin [0; 1]$ aber nicht im Parallelogramm.

3. $\frac{1}{6}$ des Spatprodukts gibt das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten A, B, C, D an. Ist das Volumen 0, so liegen A, B, C, D in einer Ebene. Spatprodukt hier:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 60 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 24 + 36 - 60 = 0.$$

Also liegen die Vektoren in einer Ebene und sind somit linear abhängig.

4. (a) Mit den Punkten $A_1, A_2(0|4|0), A_3$ stellt man die Gleichung der Ebene auf:

$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- (b) $\overrightarrow{ZA'_i} = \overrightarrow{A_iZ}$, also $\vec{A}'_i - \vec{Z} = \vec{Z} - \vec{A}_i$, also $\vec{A}'_i = 2\vec{Z} - \vec{A}_i$ liefert $A'_1(6|4|0), A'_2(0|0|0), A'_3(0|4|-4)$. Mit diesen Punkten stellt man die Gleichung von E' auf:

$$E' : \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

5. $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - (-5))^2 + (x_3 - 0)^2 = 6^2$, also $(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 5)^2 + x_3^2 = 36$ (bzw. ausquadriert $x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 + 10x_2 + x_3^2 = 2$).

Wegen $|\overrightarrow{MO}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 0} = \sqrt{34} < 6$ liegt O innerhalb der Kugel.