



13. Klasse Lösungen	13
Normalverteilung	03

1. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist offenbar erfüllt ($2(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$ für $x \geq 0$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z 2(x+1)^{-3}dx = \lim_{z \rightarrow \infty} [-(x+1)^{-2}]_0^z = \lim_{z \rightarrow \infty} (-\frac{1}{(z+1)^2} - (-\frac{1}{1})) = 1.$$
2. Als Hochpunkt (bei der Normalverteilung $(\mu | \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$) entnimmt man ungefähr $(1 | 1,6)$.
 Also ist $\mu = 1$ und $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 1,6$, somit $\sigma \approx \frac{1}{1,6\sqrt{2\pi}} \approx 0,25$, was auch mit der Lage der Wendepunkte bei $x = \mu - \sigma \approx 0,75$ und $x = \mu + \sigma \approx 1,25$ zusammenpasst.
 Da die kumulative Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu,\sigma}$ eine Integralfunktion ist, gilt $\Phi'_{\mu,\sigma}(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x)$, also Steigung $\Phi_{\mu,\sigma}(\mu) = \varphi_{\mu,\sigma}(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 1,6$.

$$y = \Phi_{\mu,\sigma}(\mu + \sigma) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma} \varphi_{\mu,\sigma}(x)dx = P_{\mu,\sigma}(X \leq \mu + \sigma).$$
 Nach den Sigma-Regeln ist $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$, somit wegen der Symmetrie außerhalb dieses Bereichs $P(X < \mu - \sigma) = P(X > \mu + \sigma) \approx \frac{1-0,68}{2} = 0,16$ und somit y-Wert $y = P(X \leq \mu + \sigma) = 1 - P(X > \mu + \sigma) \approx 1 - 0,16 = 0,84$.
3. (a) $P(A) = P_{\mu=60,\sigma=0,46}(X > 60,5) = 0,13853$
 $P(B) = P_{\mu=60,\sigma=0,46}(59,9 < X < 60,1) = 0,17210$
 $P(C) = P_{\mu=60,\sigma=0,46}(X = 60) = 0$ (Bei stetigen Zufallsgrößen ist die Wahrscheinlichkeit, einen Wert genau zu treffen, stets 0)
 (b) Stellt man sich in der Normalverteilungsdichte einen „links“ von ℓ liegenden Bereich schraffiert mit Wahrscheinlichkeit, also Fläche 0,064 vor, so muss dieser links vom Mittelwert liegen, also $\ell < \mu = 60$; wegen der Sigma-Regel ist im „Außenbereich“ $P(X < \mu - 1,64\sigma) \approx 0,05$, also gilt $\ell > \mu - 1,64\sigma = 60 - 1,4 \cdot 0,46 = 59,25$. Man probiert also mit dem Taschenrechner Werte im Bereich 59,3 bis 59,9 und findet $P_{\mu=60,\sigma=0,46}(X \leq 59,3) \approx 0,064$, also $\ell \approx 59,3$.
 (c) Treffer: Nagel wird beanstandet, Trefferwahrscheinlichkeit $p = P_{\mu=0,\sigma=0,46}(X < 59 \text{ oder } X > 61) = 1 - P_{\mu=0,\sigma=0,46}(59 \leq X \leq 61) \approx 1 - 0,97 = 0,03$.
 $P(E) = P_{n=200,p=0,03}(Z \geq 6) = 1 - P_{n=200,p=0,03}(Z \leq 5) = 1 - 0,443 = 0,557$ (Binomialverteilung)
 (d) Sigma-Regeln: $P_{\mu,\sigma}(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) = 0,95$, also erlaubte Abweichung $1,96\sigma = 1,96 \cdot 0,46 = 0,9016 \approx 0,9$ (mm).
4. (a) $P_{\mu=5,\sigma=2}(2 \leq X \leq 6) = 0,62466 \approx 0,62$
 (b) Der bisherige Mittelwert $\mu = 5$ liegt im Intervall $[2; 6]$ und der Maximalwert der Normalverteilungs-Dichte somit in diesem Intervall. Gleiches σ bedeutet dass die Kurve nur in x-Richtung verschoben wird. Damit die Fläche in diesem Bereich kleiner wird, sollte man den Mittelwert μ außerhalb wählen, z. B. $\mu = 7$.
 (c) Analog zu (b) sollte man den μ zentraler im Intervall wählen, z. B. Mitte $\mu = 4$.
 (d) Damit weniger im Intervall liegt, sollten die Werte stark nach außen streuen, also wählt man z. B. ein sehr großes $\sigma = 10$.
 (e) Damit mehr im Intervall liegt, sollten die Werte stärker um den Mittelwert konzentriert sein, also wählt man z. B. ein sehr kleines $\sigma = 0,5$.
 (f) Bei den hier vorgeschlagenen Werten bestätigt man:
 $P_{\mu=7,\sigma=2}(2 \leq X \leq 6) = 0,30 < 0,62$, $P_{\mu=4,\sigma=2}(2 \leq X \leq 6) = 0,68 > 0,62$
 $P_{\mu=5,\sigma=10}(2 \leq X \leq 6) = 0,16 < 0,62$, $P_{\mu=5,\sigma=0,5}(2 \leq X \leq 6) = 0,98 > 0,62$