

|                                              |           |
|----------------------------------------------|-----------|
| <b>13. Klasse Lösungen</b>                   | <b>13</b> |
| <b>Integralfunktion, Integralanwendungen</b> | <b>02</b> |

1.

$$I(x) = [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^x = \sin x - \sin \frac{\pi}{2} = \sin x - 1$$

$$I(0) = \sin 0 - 1 = -1 < 0$$

Die Fläche liegt zwar oberhalb der  $x$ -Achse, aber „rückwärts“ integrieren (von  $\frac{\pi}{2}$  bis 0) ändert das Vorzeichen.

2.

Falls  $I(x) = x \cdot (\ln(x+3) - \ln(2x)) + 3 \ln(x+3) - 7 \ln 2$  Integralfunktion, so muss deren Ableitung den Integranden ergeben:

$$I'(x) = 1 \cdot \ln \frac{x+3}{2x} + x \cdot \left( \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x} \cdot 2 \right) + 3 \cdot \frac{1}{x+3} = \ln \frac{x+3}{2x} + x \cdot \frac{x-(x+3)}{(x+3) \cdot x} + \frac{3}{x+3} = f(x).$$

Mit Hilfe dieser Stammfunktion kann nun integriert werden:

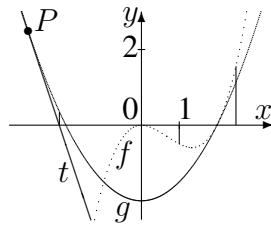
$$\int_1^x \ln \frac{x+3}{2x} dx = [I(t)]_1^x = I(x) - I(1) =$$

$$I(x) - (1 \cdot \ln \frac{1+3}{2 \cdot 1} + 3 \ln(1+3) - 7 \ln 2) = I(x) - (\ln 2 + 3 \ln 4 - 7 \ln 2) = I(x), \text{ denn } \ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2.$$

Aus  $f(3) = I'(3) = 0$  folgt, dass  $I$  bei  $x = 3$  eine waagrechte Tangente hat.

3.

- (a) Wegen der Nullstellen  $x = 0$  und  $x = 2$  und wegen der Lage unterhalb der  $x$ -Achse ist



$$A_1 = - \int_0^2 f(x) dx = - \int_0^2 \left( \frac{1}{2}x^3 - x^2 \right) dx = - \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = -(2 - \frac{8}{3}) = \frac{2}{3}.$$

- (b) Schnittstellen:  $f(x) = g(x)$ ;

$$(x-2)x^2 = (x+2)(x-2); \text{ also } x_1 = 2 \text{ oder } x^2 = x+2, \text{ d. h. } x^2 - x - 2 = 0,$$

$$\text{d. h. } x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1 \text{ oder } 2$$

$$A_2 = \int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^2 = \frac{1}{2} (4 - 8 + 8 - (\frac{1}{4} - (-1) - 4)) = \frac{27}{8}.$$

(c)  $A_3 = \int_1^{2.5} \left( \frac{1}{2}x^3 - x^2 \right) dx = \left[ \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^{2.5} = \frac{1}{8} \cdot 2.5^4 - \frac{1}{3} \cdot 2.5^3 - \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \right) \approx -0,12 < 0$

Von den Flächenstücken, die zu diesem Integral beitragen, liegt mehr unterhalb als oberhalb der  $x$ -Achse.

- (d) Berechnung der Tangente:  $g'(x) = x$ ,  $m = g'(-3) = -3$ , Ansatz  $y = -3x + t$ ,  $P$  einsetzen  $2,5 = -3 \cdot (-3) + t$  liefert  $t$ , also Tangente  $t(x) = -3x - 6,5$ .

Nullstelle der Tangente:

$$-3x - 6,5 = 0, \text{ also } x = -\frac{13}{6}.$$

Das Flächenstück wird durch die Gerade  $x = -\frac{13}{6}$  zerlegt in zwei Teile:

$$A_4 = \int_{-3}^{-\frac{13}{6}} (g(x) - t(x)) dx + \int_{-\frac{13}{6}}^{-2} g(x) dx = \left[ \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \right]_{-3}^{-\frac{13}{6}} + \left[ \frac{1}{6}x^3 - 2x \right]_{-\frac{13}{6}}^{-2} = \frac{1}{6} \cdot \left( -\frac{13}{6} \right)^3 + \frac{3}{2} \cdot \left( -\frac{13}{6} \right)^2 + \frac{9}{2} \cdot \left( -\frac{13}{6} \right) - \left( \frac{1}{6} \cdot (-3)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-3)^2 + \frac{9}{2} \cdot (-3) \right) + \left( \frac{1}{6} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) \right) - \left( \frac{1}{6} \cdot \left( -\frac{13}{6} \right)^3 - 2 \cdot \left( -\frac{13}{6} \right) \right) = \frac{1}{8}$$

(e)  $\int_0^b \left( \frac{1}{2}x^2 - 2 \right) dx = \left[ \frac{1}{6}x^3 - 2x \right]_0^b = \frac{1}{6}b^3 - 2b - 0 = 0$ , also  $b \left( \frac{1}{6}b^2 - 2 \right) = 0$ , also  $b_1 = 0, b_{2/3} = \pm \sqrt{12}$ .

Bei  $b = 0$  schrumpft die Fläche auf eine Linie der Breite 0, also Fläche 0.

Bei  $b = \pm \sqrt{12}$  haben die Flächenanteile ober- und unterhalb der  $x$ -Achse gleichen Inhalt.

4.

$A$  ist die im Zeitraum  $[-2; 0]$  (also seit 2 Zeiteinheiten vor Beginn der Zeitzählung) zurückgelegte Strecke.

$I'(x) = v(x) < 0$  bedeutet, dass der Graph von  $I$  zur Zeit  $x$  fallend ist, also wegen negativer Geschwindigkeit nun der Ort abnimmt.

5.

$$V = \pi \cdot \int_0^2 (3x)^2 dx + \pi \cdot \int_1^4 (-x+4)^2 dx = \pi \cdot \int_0^2 9x^2 dx + \pi \cdot \int_1^4 x^2 - 8x + 16 dx = \pi \cdot \left[ 3x^3 \right]_0^2 + \pi \cdot \left[ \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x \right]_1^4 = \pi \cdot (3 \cdot 8) + \pi \cdot \left( \frac{64}{3} - 64 + 64 - \left( \frac{1}{3} - 4 + 16 \right) \right) = 12$$