

13. Klasse Lösungen	13
Integration	01

1.

(a) Da f streng monoton steigend ist, nimmt die Funktion jeweils am rechten Streifenrand ihren größten Wert an. Daher ist $A \leq$ „Summe Streifenbreite $\cdot$ Streifenhöhe“
 $1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) = \frac{e^{-1}}{e^{-1}+1} + \frac{e^0}{e^0+1} + \frac{e^1}{e^1+1} + \frac{e^2}{e^2+1} \approx 2,38$.

(b) $A = \int_{-2}^2 f(x) dx = [\ln(e^x + 1)]_{-2}^2 = \ln(e^2 + 1) - \ln(e^{-2} + 1) = 2$.
 Die Abweichung 0,38 sind $\frac{0,38}{2} = 0,19 = 19\%$ hiervon.

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$ beschreibt einen Sättigungswert, dem sich die Verkaufszahlen auf lange Dauer nähern.

Das Integral A beschreibt einen Gesamtbestand, d. h. die Gesamtzahl der verkauften Autos im Zeitraum von vier Jahren (seit Markteinführung vor zwei Jahren bis in zwei Jahren) gemäß dieser Modellierung.

2.

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$$

Für die Stammfunktion von $\sin(\frac{1}{2}x)$ muss man den durch Nachdifferenzieren entstehenden Faktor $\frac{1}{2}$ durch einen Vorfaktor 2 ausgleichen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h(x) dx &= \int_0^{2\pi} 2 \sin(\tfrac{1}{2}x) dx \\ &= [-2 \cdot 2 \cos(\tfrac{1}{2}x)]_0^{2\pi} \\ &= -4 \cos(\tfrac{1}{2} \cdot 2\pi) - (-4 \cos 0) \\ &= -4 \cdot (-1) + 4 = 8 \end{aligned}$$

Da Ergebnis ist 4-mal so groß.

Der Graph von h entsteht aus dem Graphen von f durch Streckung in y-Richtung mit Faktor 2 (doppelte Amplitude) und durch Streckung auch in x-Richtung auf doppelte Größe (doppelte Periodenlänge/„ $\frac{1}{2}x$ “ im Term); da man sowohl in Länge als auch in Höhe den Faktor 2 hat, ist die Fläche 4-fach.

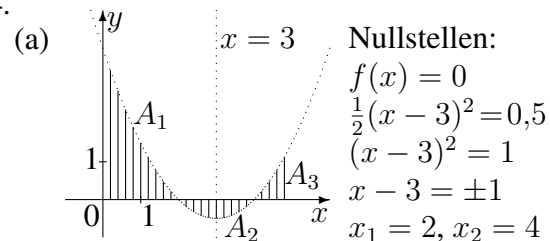
3.

$$(a) \int_{-2}^{-1} \frac{x^3 - x - 5}{x^2} dx = \int_{-2}^{-1} (x - \frac{1}{x} - 5x^{-2}) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + 5x^{-1} \right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \ln 1 - 5 - (2 - \ln 2 - \frac{5}{2}) \approx -3,31$$

$$(b) \int_0^4 (6x^{\frac{1}{3}} - 5) dx = \left[6 \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - 5x \right]_0^4 = \frac{9}{2} \cdot 4^{\frac{4}{3}} - 20 - 0 \approx 8,57$$

$$(c) \int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e - 1) \approx 0,86$$

4.



(b) $A = A_1 + A_2 + A_3$. A_2 unterhalb der x-Achse: Betrag des Integralwerts:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^2 (\tfrac{1}{2}(x-3)^2 - 0,5) dx \\ &= \left[\tfrac{1}{6}(x-3)^3 - 0,5x \right]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{6} \cdot (-1) - 1 - (\tfrac{1}{6} \cdot (-3)^3 - 0) = \tfrac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \left| \int_2^3 (\tfrac{1}{2}(x-3)^2 - 0,5) dx \right| \\ &= \left| \left[\tfrac{1}{6}(x-3)^3 - 0,5x \right]_2^3 \right| = \left| \left[\tfrac{1}{6} \cdot 0 - 1,5 \right] - \left[\tfrac{1}{6} \cdot (-1)^3 - 1 \right] \right| = \left| -1,5 - (-\tfrac{5}{6}) \right| = \left| -\tfrac{4}{3} \right| = \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

$$A_3 = \int_3^4 (\tfrac{1}{2}(x-3)^2 - 0,5) dx = \dots = \tfrac{2}{3}$$

$$A = \tfrac{10}{3} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} = \tfrac{14}{3}$$

$$(c) \int_0^5 (\tfrac{1}{2}(x-3)^2 - 0,5) dx = [\dots]_0^5 = \tfrac{10}{3}$$

(oder als Flächenbilanz $A_1 - A_2 + A_3$)

$$(d) \int_0^3 (\tfrac{1}{2}(x-3)^2 - a) dx = \left[\tfrac{1}{6}(x-3)^3 - ax \right]_0^3 = -3a - (\tfrac{1}{6} \cdot (-3)^3 - 0) = -3a + 4,5 - 3a + 4,5 = 0 \text{ für } a = 1,5$$

A: Flächenbilanz 0, d. h. gleich große Flächen unter-/oberhalb der x-Achse.

B: ebenso, da in der Gleichung links die Fläche zwischen $x = 0$ und der Nullstelle und rechts der Betrag der unterhalb liegenden Fläche zwischen Nullstelle und $x = 3$ steht.