



13. Klasse Lösungen	13
Steckbriefaufgabe, Optimierung	10

- Steigungsdreieck $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2013 - 2014}{2012 - 2015} = \frac{1}{3}$. Ansatz also: $y = \frac{1}{3}x + t$
 P einsetzen: $2013 = \frac{1}{3} \cdot 2012 + t \Rightarrow t = 1342\frac{1}{3}$. Also Geradengl.: $y = \frac{1}{3}x + 1342\frac{1}{3}$.
- Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, also $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
 Punkt $(1 | -64)$, also $f(1) = -64$: $a + b + c + d = -64$.
 Waagrechte Tangente bei $x = 1$, also $f'(1) = 0$: $3a + 2b + c = 0$.
 Nullstelle $x = 5$, also $f(5) = 0$: $125a + 25b + 5c + d = 0$.
 Punkt $(0 | -65)$, also $f(0) = -65$: $d = -65$.
 Gleichungssystem nach Einsetzen von $d = -65$:

$$\begin{array}{rcl} a + b + c = 1 & | \cdot (-1) & | \cdot (-5) \\ 3a + 2b + c = 0 & | \cdot 1 & \\ 125a + 25b + 5c = 65 & | \cdot 1 & \\ \hline 2a + b = -1 & | \cdot (-20) & \\ 120a + 20b = 60 & | \cdot 1 & \\ \hline 80a = 80. & & \end{array}$$
 Also $a = 1$, also (aus $2a + b = -1$) $b = -3$,
 also (aus $a + b + c = 1$) $c = 3$.
 Somit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 65$.
 Nullstelle: $f(x) = 0$, $x_1 = 5$.
 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2 > 0$ für $x \neq 1$.
 f ist somit streng monoton und hat daher keine weiteren Nullstellen.
- $f(x) = (x+a)e^{bx}$, also (Produktregel) $f'(x) = 1 \cdot e^{bx} + (x+a)e^{bx} \cdot b = (1+bx+ab)e^{bx}$.
 Punkt $(0, 1)$, also $f(0) = 1$: $ae^0 = 1$, also $a = 1$.
 Steigung bei $x = 0$ ist 3, also $f'(0) = 3$: $1 + ab = 3$.
 Einsetzen von $a = 1$ liefert $b = 2$. Also $f(x) = (x+1)e^{2x}$.
- G: Zu minimieren: Leiterlänge $|\overline{AF}| = \sqrt{h^2 + x^2}$
 N: Dreieck ABF ähnlich zu Dreieck CDF , also $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BF}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{DF}|}$, d. h.
 $\frac{h}{x} = \frac{8}{x-1}$
 A: Aus N folgt $h = \frac{8x}{x-1}$, also $|\overline{AF}| = \sqrt{\left(\frac{8x}{x-1}\right)^2 + x^2}$.
 Dieser Ausdruck wird minimal, wenn der Ausdruck unter der Wurzel
 $r(x) = \left(\frac{8x}{x-1}\right)^2 + x^2 = \frac{64x^2}{(x-1)^2} + x^2 = \frac{64x^2 + x^2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^4 - 2x^3 + 65x^2}{(x-1)^2}$
 möglichst klein ist.
 D: $r'(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot (4x^3 - 6x^2 + 130x) - (x^4 - 2x^3 + 65x^2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x^3 - 3x^2 + 3x - 65)}{(x-1)^3}$
 ($(x-1)$ kürzen, Zähler zusammenfassen, $2x$ ausklammern)
 E: $r'(x) = 0$ liefert $2x(x^3 - 3x^2 + 3x - 65) = 0$, also $x_1 = 0$ oder $x^3 - 3x^2 + 3x - 65 = 0$.
 Die Nullstelle von letzterem Polynom kann mit $x_2 = 5$ „geraten“
 werden; weitere Nullstellen sind nicht vorhanden ($\rightarrow$ Aufgabe 2). $\begin{array}{c} r' > 0 \\ \text{steigt} \end{array} \quad \begin{array}{c} r' < 0 \\ \text{fällt} \end{array} \quad \begin{array}{c} r' > 0 \\ \text{steigt} \end{array}$
 Also ist r und damit die Leiterlänge $|\overline{AF}|$ minimal für $x = 5$.
- Zu optimierende Größe: $pq = p(1-p)$ (Damit ist bereits im ersten Schritt auch die Nebenbedingung $q = 1 - p$ und das Ausdrücken durch nur eine Variable geschehen).
 Umbenennung $x \leftrightarrow p$: $f(x) = x(1-x) = x - x^2$, $x \in [0; 1]$.
 Differenzieren: $f'(x) = 1 - 2x$. Extremwerte suchen: $f'(x) = 0$; $x = \frac{1}{2}$.
 Da es sich bei f um eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen 0 und 1 handelt, ist bei $x = \frac{1}{2}$, also bei $p = \frac{1}{2}$ das obige Produkt maximal (nämlich $p(1-p) = \frac{1}{4}$).
 Wegen des Wertebereichs $[0; 1]$ gibt es daneben noch Randminima bei $p = 0$ und $p = 1$ mit minimalem Wert $p(1-p) = 0$.

