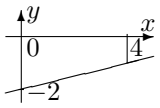


12. Klasse Lösungen (alter LP)	12
Kompakt-Überblick zum Grundwissen	K

1.

(a) Schnittstellen: $f(x) = g(x); \frac{1}{2}x^3 + x^2 = 0;$
 $x^2(\frac{1}{2}x + 1) = 0; x_{1/2} = 0, x_3 = -2$
 $\int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^0 (\frac{1}{2}x^3 + x^2) dx$
 $= [\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3]_{-2}^0 = 0 - (2 - \frac{8}{3}) = \frac{2}{3}$

(b) Bruch auseinanderziehen und $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$
schreiben: $\int \frac{2x+1}{x^2} dx = \int (\frac{2}{x} + x^{-2}) dx =$
 $= 2 \ln |x| - x^{-1} + C$

(c) Trapezfläche unterhalb der 
x-Achse mit Mittellinie 1,5
u. Höhe 4, Integralwert also $-\frac{3}{2} \cdot 4 = -6$.

2.

$I(x) = [e^t - \frac{1}{2}t^2]_0^x = e^x - \frac{1}{2}x^2 - 1,$
 $I'(x) = e^x - x$ (klar nach HdI),
 $I''(x) = e^x - 1, I''(x) = 0$ ergibt $x = 0$.
 $\frac{I'' < 0}{\text{rechts-}} \quad \frac{I'' > 0}{\text{links-gekrümmt}} \quad I(0) = 0, \text{ also WP}(0|0)$

3.

(a) $B(3; \frac{1}{3}; 2) + B(3; \frac{1}{3}; 3) = 0,25926$
(b) $\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{8}{0}}{\binom{12}{3}} = 0,23636$
(c) $E(X) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1,$
 $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816$

4.

Treffer: Befragte Person: „Kleeblatt = Glück“
 $H_0: p \leq 0,25 \quad H_1: p > 0,25$
Entscheidungsregel: H_0 ablehnen („Schlagzeile trifft zu“), falls Trefferzahl $k \geq k_0$
 $\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P(k \geq k_0) \leq 0,05;$
 $P_{n=100; p=0,25}(k \leq k_0 - 1) \geq 0,95$
Tafel: $k_0 - 1 = 32$, also $k_0 = 33$.

5.

$AB: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$
Einsetzen von C (erste Zeile $\lambda = -4$, zweite Zeile $\lambda = -1$), also liegt C nicht auf AB .
Abstand von $H(2|-7|2)$ von AB : Allg. Geradenpunkt $F(-\lambda|1-2\lambda|4-2\lambda)$. $\overrightarrow{HF} \circ \vec{u} = 0;$
 $(-\lambda - 2) \cdot (-1) + (-2\lambda + 8) \cdot (-2) + (-2\lambda + 2) \cdot (-2) = 0;$ $\lambda = 2;$ Lotfußpunkt des Lots von H auf g : $F(-2|-3|0)$
Abstand: $\overline{HF} = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$

6.

$\vec{N} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{P})$, also $N(0|0,5|4).$
 $E_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

7.

$E_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
Normalvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, Ansatz $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und Einsetzen von A liefern:
 $E_2: 12x_1 - 12x_2 + 6x_3 - 12 = 0$

$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{144 + 144 + 36} = 18$

HNF: $\frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2) = 0$
 P in HNF: $d(P, E_2) = |\dots| = \frac{2}{3}$

$l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R}.$

Kugelgleichung: $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 4)^2 = (\frac{2}{3})^2$

8.

Ri.vektoren nicht parallel; gleichsetzen:
 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
Erste Zeile: $-1 + \lambda = -3, \lambda = -2.$

In zweite Zeile: $-2 = 10 + 4\mu, \mu = -3.$

Probe in dritter Zeile stimmt,

g und h_1 schneiden sich in $(-3|-2|4).$

Schnittwinkel $\varphi: \varphi \approx 65,16^\circ$, denn

$\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{1+1+1} \sqrt{0+16+1}} \approx 0,42$

9.

E_3 ist parallel zur x_2 -Achse.

Achsenpunkte sind $(?|0|0)$, $(0|?|0)$ und $(0|0|?)$, also $(2|0|0)$ mit x_1 -Achse, $(0|0|-4)$ mit x_3 -Achse, kein Schnitt mit x_2 -Achse.

Schnittwinkel ψ mit den Achsen: Mit Richtungsvektor $\vec{u}$ der x_1 -Achse und Normalvektor $\vec{n}$ von E_3 , $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$, und

$\sin \psi = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$ folgt $\psi \approx 15,95^\circ$ mit x_1 -Achse und analog $\psi \approx 74,05^\circ$ mit x_3 -Achse.

10.

„ E_4 plus $2 \cdot E_5$ “ liefert $7x_1 + 7x_3 = 7$; z. B. $x_1 = \tau$, dann $x_3 = 1 - \tau, x_2 = 4 - 2x_1 - 3x_3 = 1 + \tau$, also $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau \in \mathbb{R}.$