



|                                        |           |
|----------------------------------------|-----------|
| <b>12. Klasse Lösungen (alter LP)</b>  | <b>12</b> |
| <b>Normalenform und HNF von Ebenen</b> | <b>07</b> |

1.

$$(a) \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\text{bequemer mit dem } \frac{1}{5}\text{-fachen } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ansatz:  $2x_1 - x_2 + 2x_3 = d$ . Einsetzen von  $(11|2|-10)$  liefert  $d = 0$ .

Also  $E_1: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ .

$$(b) \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\text{bequemer mit dem } \frac{1}{3}\text{-fachen } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ansatz:  $2x_1 - x_2 = d$ . Einsetzen von  $(2|6|-1)$  liefert  $d = -1$ .

Also  $E_2: 2x_1 - x_2 = -1$ .

$$(c) \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\text{bequemer mit dem } -\frac{1}{3}\text{-fachen } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ansatz:  $x_2 = d$ .

Einsetzen von  $(2|6|-1)$  liefert  $d = 6$ .

Also  $E_3: x_2 = 6$ .

(d)  $E_1$  geht durch den Ursprung,  $E_2$  ist parallel zur  $x_3$ -Achse,  $E_3$  ist parallel zur  $x_1x_3$ -Ebene.

$$(e) \text{ Zu } E_2: \begin{array}{l|l} x_1 = 2 + \lambda - \mu & | \cdot (-2) \\ x_2 = 6 + 2\lambda - 2\mu & | \\ \hline -2x_1 + x_2 = 2 \end{array}$$

Zu  $E_3$ : Zweite Zeile  $x_2 = 6$  liefert direkt die parameterfreie Form.

$$(f) \begin{array}{l|l} x_1 = 1 + 2\lambda & | \cdot 3 \\ x_2 = 2 - 3\lambda & | \cdot 2 \\ \hline 3x_1 + 2x_2 = 7, \text{ also } x_2 = 3,5 - 1,5x_1. \end{array}$$

2.

$P \notin E$ , denn Einsetzen von  $P$  in  $E$  liefert  $2 - 3 - 7 \stackrel{?}{=} 24$  Widerspruch.

$$\text{Lotgerade: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.

Skalarprodukt ausführen:  $3(x_1 + 2) + 3x_2 - (x_3 - 9) = 0$ , also  $3x_1 + 3x_2 - x_3 = -15$ .

$P$  in  $E$  ergibt eine wahre Aussage:

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) - 6 = -15 \text{ (wahr)}.$$

4.

$$(a) |\vec{n}_E| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7,$$

$$\text{HNF: } E: \frac{1}{7}(3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 14) = 0.$$

$$|\vec{n}_F| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18},$$

$$\text{HNF: } F: \frac{1}{3\sqrt{2}}(x_1 - 4x_2 - x_3 - 12) = 0.$$

(b) Mit der HNF berechnet man den Abstand des Punktes  $P$  von den Ebenen:

$$d(P, E) = \left| \frac{1}{7}(3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-6) - 14) \right| = 6.$$

$$d(P, F) = \left| \frac{1}{3\sqrt{2}}(4 - 4 \cdot 2 - (-6) - 12) \right| = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2,36.$$

Also liegt  $P$  näher an  $F$ .

(c) Bei Einsetzen in die HNF muss 10 oder  $-10$  resultieren:

$$\frac{1}{7}(6x_3 - 14) = \pm 10, \text{ also } x_3 = \frac{\pm 70 + 14}{6}, \text{ die gesuchten Punkte sind also } (0|0|14) \text{ und } (0|0|-\frac{28}{3}).$$

(d) Radius  $r = d(M, E) =$

$$\left| \frac{1}{7}(3 \cdot 9 - 2 \cdot 7 + 6 \cdot 6 - 14) \right| = 5.$$

Also Kugel ( $\rightarrow$  grund114.pdf):

$$(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 7)^2 + (x_3 - 6)^2 = 25.$$

Aus der Skizze erkennt man, dass der Radius  $R$  des Schnittkreises mit Pythagoras berechnet werden kann:

$$5^2 + R^2 = 13^2, \text{ also } R = 12.$$

