

<b>12. Klasse Lösungen (alter LP)</b>	<b>12</b>
<b>Ebenengleichungen</b>	<b>06</b>

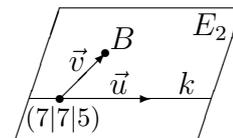
$$1. \quad (a) \quad E_1 : \vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}) + \mu(\vec{C} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . (Möglich sind auch Lösungen z. B. mit  $\vec{X} = \vec{B} + \lambda(\vec{A} - \vec{B}) + \mu(\vec{C} - \vec{B})$ ).

$$(b) \quad B \text{ in } k: \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{liefert } 5 = 7 - 5\sigma, \text{ also } \sigma = 0,4, \text{ Probe}$$

in zweite Gleichung  $8 = 7 - 5\sigma$  Widerspruch, also  $B$  nicht auf  $k$ .

$$E_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



$$(c) \quad E_3 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$(d) \quad E_4 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. (a) Da der erste Richtungsvektor das 4-fache des zweiten Richtungsvektors ist, zeigen diese beiden in die gleiche Richtung, sind also linear abhängig, so dass keine Ebenengleichung entsteht.

$$(b) \quad P \text{ in } E: \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erste und dritte Zeile liefern  $1 = 2 + 4\lambda + \mu$  und  $3 = 1 + \lambda$ , also  $\lambda = 2$  und  $\mu = -9$ . Probe in zweite Zeile  $-4 = -3 + 4\lambda + \mu$  stimmt. Also liegt  $P$  auf  $E$ , wegen  $\lambda \notin [0; 1]$  aber nicht im Parallelogramm.

3.  $\frac{1}{6}$  des Spatprodukts gibt das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten  $A, B, C, D$  an. Ist das Volumen 0, so liegen  $A, B, C, D$  in einer Ebene. Spatprodukt hier:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 60 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 24 + 36 - 60 = 0.$$

Also liegen die Vektoren in einer Ebene und sind somit linear abhängig.

4. (a) Mit den Punkten  $A_1, A_2(0|4|0), A_3$  stellt man die Gleichung der Ebene auf:

$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \quad \overrightarrow{ZA'_i} = \overrightarrow{A_i Z}, \text{ also } \vec{A}'_i - \vec{Z} = \vec{Z} - \vec{A}_i, \text{ also } \vec{A}'_i = 2\vec{Z} - \vec{A}_i \text{ liefert } A'_1(6|4|0),$$

$A'_2(0|0|0), A'_3(0|4|-4)$ .

Mit diesen Punkten stellt man die Gleichung von  $E'$  auf:

$$E' : \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$