12. Klasse Lösungen 12
Geradengleichungen 05

1.
Q liegt nicht auf g, denn:

$$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l}\Rightarrow \lambda = -1\\ \checkmark\\ ↯\end{array}$$

$R(0|2|1)$ liegt auf g, denn:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l}\Rightarrow \lambda = -2\\ \text{Probe: passt!}\\ \text{Probe: passt!}\end{array}$$

S liegt nicht auf g, denn:

$$\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l}\Rightarrow \lambda = 3\\ ↯\end{array}$$

Für die x_3-Koordinate von T gilt: $0 = -1 - \lambda$, also $\lambda = -1$, also $T(1|4|0)$.

2.

$$AB : \vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\6\\-4\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

C liegt auf g: Wähle $\lambda = \frac{2}{3}$.
D liegt auf g: Wähle $\lambda = -2{,}5$.

3.

$$AB : \vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ansatz: $F(-1+3\lambda| -1-\lambda|1)$.

$DF \perp g$, also $\begin{pmatrix}-1+3\lambda-2{,}5\\-1-\lambda+0{,}5\\1-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} = 0.$

$(-3{,}5+3\lambda)\cdot 3 + (-0{,}5-\lambda)\cdot(-1) + 0 = 0.$
$-10 + 10\lambda = 0$. $\lambda = 1$. Also $F(2|-2|1)$.
Abstand $d(D, AB) = |\overrightarrow{DF}| =$
$= \sqrt{(2-2{,}5)^2 + (-2+0,5)^2 + (1-1)^2} =$
$= \sqrt{2{,}5}$.
Dreiecksfläche A_{ABD}: $[DF]$ ist die Höhe im Dreieck ABD auf der Grundlinie $[AB]$, also $A_{ABD} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{DF} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2{,}5} = \frac{5}{2}$.
Gleiches Ergebnis bei Berechnung mit dem Vektorprodukt: $A_{ABD} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = \frac{5}{2}$ (vgl. ueb119.pdf, Aufgabe 2(c)).

4.
(a) Aufpunkt $(0|0|0)$, also ist g eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems.

(b) x_2-Komponente konstant 5, also ist h parallel zur x_1x_3-Ebene.

5.
(a) Die Punktkoordinaten können direkt in eine Geradengleichung übertragen werden („allgemeiner Geradenpunkt rückwärts“):

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\14\\12\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(b) Die drei Punkte haben jeweils gleichen Abstand voneinander.

Mögliche Formulierungen:

$P_{0,5}$ ist Mittelpunkt von P_0 und P_1.

P_{-1} ist der Spiegelpunkt von P_1 bei Spiegelung am Punkt P_0.

6.
(a) Die x_3-Koordinate wird 0:

$$p : \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

(b) y-Achsenabschnitt $(0|2{,}5)$ als Aufpunkt. Wegen Steigung $-\frac{1}{2}$ Richtungsvektor „2 nach rechts, 1 nach unten“, also

$$\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2{,}5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dies ist übrigens die in die x_1x_2- bzw. xy-Grundebene eingebettete Gerade aus Teilaufgabe (a), denn der Punkt $(0|2{,}5|0)$ liegt auf p, wie man mit $\tau = -1{,}5$ sieht.