12. Klasse Lösungen (alter LP) — 12
Testen von Hypothesen — 04

1.
Treffer: Befragte Person ist Wähler der Partei, Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt.
H_0: $p \le 0{,}05$, H_1: $p > 0{,}05$
ER: H_0 ablehnen, falls Trefferzahl $k \ge k_0$.
α-Fehler: H_0 abgelehnt, obwohl wahr, d. h. zu glauben, die Partei überspringt die 5 %-Hürde, obwohl sie nicht den dafür notwendigen Wähleranteil hat (= schwerer Fehler):
$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{\substack{n=200\\p=0{,}05}}(k \ge k_0) \le 0{,}01$, d. h. $P_{\substack{n=200\\p=0{,}05}}(k \le \underbrace{k_0 - 1}_{18 \text{ (Tafel)}}) \ge 0{,}99$, also $k_0 = 19$.
ER also: H_0 ablehnen, d. h. kein Wahlkampf, falls mind. 19 Wähler in der Stichprobe.

2.
Treffer: Spiel mit sechs Würfen; hierfür: 6 Mögl. beim ersten Wurf, dann 5 beim zweiten usw., beim Laplace-Würfel also Treffer-w. $p = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6} = \frac{120}{7776}$, sonst p unbekannt.
H_0: $p \ge \frac{120}{7776}$, H_1: $p < \frac{120}{7776}$
ER: H_0 ablehnen, falls Trefferzahl $k \le k_0$.
$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{\substack{n=1000\\p=120/7776}}(k \le k_0) \le 0{,}05$, Tabelle $\to k_0 = 8$.
ER also: H_0 ablehnen, d. h. den Würfel signifikant ablehnen, bei ≤ 8 Treffern.

3.
(a) Treffer: Steinplatte ist 1. Wahl, Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt.
H_0: $p \le 0{,}70$, H_1: $p > 0{,}70$
α-Fehler: H_0 abgelehnt, obwohl wahr, d. h. zu glauben, die Steinplattenmenge sei hochwertig, obwohl sie nicht den nötigen Anteil hat $\to$ Verärgerung des Kunden, schwerer Fehler.

(b) ER: H_0 ablehnen, falls $k \ge k_0$.
$\alpha = P_{n=50,p=0{,}70}(k \ge k_0) \le 0{,}05$,
d. h. $P_{\substack{n=50\\p=0{,}70}}(k \le \underbrace{k_0 - 1}_{40 \text{ (Tafel)}}) \ge 0{,}95$,
also $k_0 = 41$.
ER also: H_0 ablehnen, d. h. Steinplattenmenge für gut halten, falls mind. 41 Platten 1. Wahl in der Stichprobe.

(c) Bei 20 % von 50 = 10 Steinen 2. Wahl, d. h. 40 Steine 1. Wahl, genügt dies also nicht, um die Lieferung für signifikant gut zu halten (weitere Tests nötig).

(d) $\beta = P_{n=50 p=0{,}85}(k \le 40) \stackrel{\text{(Tafel)}}{=} 0{,}20891$

4.
(a) Treffer: Kandidat zieht Joker, Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt.
α-Fehler: Den Kandidaten aufgrund der Trefferzahl k für unbegabt halten, obwohl der in Wirklichkeit gut ist. Daher:
H_0: $p = 0{,}5$, H_1: $p = \frac{6}{110}$.
ER: H_0 ablehnen, falls $k \le 1$.
$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{n=12,p=6/110}(k \le 1) \approx 0{,}51 + 0{,}35 = 0{,}86$ (Histogramm erste zwei Balken).
$\beta = P_{H_1}(H_0 \text{ nicht abgelehnt}) = P_{\substack{n=12\\p=0{,}50}}(k \ge 2) = 1 - P_{\substack{n=12\\p=0{,}50}}(k \le 1) = 1 - (0{,}5^{12} + \binom{12}{1}0{,}5^1 0{,}5^{11}) = 0{,}9968$

(b) ER jetzt: H_0 ablehnen, falls $k \le k_0$.
$\alpha = P_{n=48,p=6/110}(k \le k_0) \le 0{,}10$, im Histogramm werden von 0 bis k_0 so viele Balken genommen, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten unter 0,10 bleibt, also nur der erste, also $k_0 = 0$. Bereits bei einem erkannten Joker kann die Hypothese eines „Zufallstreffers“ nicht angenommen werden.

Dies beweist zwar noch nicht die Begabung des Kandidaten, der Kandidat wird sozusagen „mangels Beweisen“ („in dubio pro reo“) freigelassen.

(c) Aufgrund der unterschiedlichen Skalierung der k-Achse müsste die zweite Graphik eigentlich 4-mal so breit gezeichnet werden; jedoch ist die Streuung $\sqrt{npq}$ nur $\sqrt{4} = 2$-fach, so dass sich im Histogramm ein schmälerer Berg ergibt.

(d) Durch Erhöhung des Stichprobenumfangs können beide Fehler verkleinert werden.