CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg123a.pdf

# 12. Klasse Lösungen (alter LP) 12
# Erwartungswert, Binomialverteilung 03

1. Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$: „Wann unter den $n$ Versuchen kommen die $k$ Treffer".
2. (a) $P(\text{„4 Treffer"}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15\cdot 903}{13\,983\,816} \approx 0{,}00097 = 0{,}097\ \%$
   (b) 49 Möglichkeiten für die erste Kugel, dann 48 für die zweite usw., also $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = \frac{49!}{43!} = 10\,068\,347\,520$
3. (a) Die Annahme ist zu hinterfragen, da z. B. einem im vorhergehenden Schritt zu kurz geschnittenes Blatt ein längeres nachfolgen könnte.
   (b)
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(k \geq 98) = B(100; 0{,}8; 98) + B(100; 0{,}8; 99) + B(100; 0{,}8; 100)$
     $= \binom{100}{98}0{,}8^{98}0{,}2^2 + \binom{100}{99}0{,}8^{99}0{,}2 + \binom{100}{100}0{,}8^{100}$
     $= \frac{100\cdot 99}{2} \cdot 0{,}8^{98}0{,}2^2 + 100 \cdot 0{,}8^{99}0{,}2 + 1 \cdot 0{,}8^{100} = 6{,}8 \cdot 10^{-8}$
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 90) = 0{,}99767$
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(k \geq 90) = 1 - P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 89) = 1 - 0{,}99430 = 0{,}00570$
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(70 \leq k \leq 90) = P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 90) - P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 69) = 0{,}99767 - 0{,}00606 = 0{,}99161$

   (c) $P_{n=50,p=0{,}8}(k < 45) = P_{n=50,p=0{,}8}(k \leq 44) = 0{,}95197$
   Für die zweite Frage soll gelten: $P_{n=50,p=0{,}8}(k < k_0) = P_{n=50,p=0{,}8}(k \leq k_0 - 1) \geq 0{,}99$. Gemäß Tafel ist dies für $k_0 - 1 \geq 46$ der Fall, also $k_0 = 47$.
   (d) $\mu = 295\cdot 0{,}03 + 296\cdot 0{,}18 + 297\cdot 0{,}45 + 298\cdot 0{,}22 + 299\cdot 0{,}07 + 300\cdot 0{,}05 = 297{,}27$
   $V(X) = (295-\mu)^2 \cdot 0{,}03 + (296-\mu)^2 \cdot 0{,}18 + \ldots = 1{,}1771$, also $\sigma = 1{,}0849$
4. (a) $M$: Mädchen, $S$: Sparer. $P_S(M) = \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
   (b) Ohne Zurücklegen: $P(E) = \frac{\binom{8}{1}\binom{17}{3}}{\binom{25}{4}} = 0{,}43004$
   Mit Zurücklegen: $B(4; \frac{8}{25}; 1) = \binom{4}{1}0{,}32 \cdot 0{,}68^3 = 0{,}40247$
   Differenz also größer als $0{,}02$.
   Bei Ziehen ohne Zurücklegen aus einer größeren Personenzahl verändert das Ziehen eines Treffers die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Zug wieder einen Treffer zu ziehen, kaum, so dass dann Ziehen ohne Zurücklegen wie Ziehen mit Zurücklegen gerechnet werden kann.
   (c)
   - Das heißt, unter den ersten drei kein weiblicher Treffer:
     $P_{n=3,p=0{,}44}(k = 0) = 0{,}56^3 = 0{,}17562$
   - Das heißt, mindestens ein Treffer unter den ersten vier:
     $P_{n=4,p=0{,}44}(k \geq 1) = 1 - P_{n=4,p=0{,}44}(k = 0) = 1 - 0{,}56^4 = 0{,}90166$
   - Das heißt, unter den ersten drei ein Treffer, dann wieder ein Treffer:
     $B(3; 0{,}44; 1) \cdot 0{,}44 = \binom{3}{1}0{,}44 \cdot 0{,}56^2 \cdot 0{,}44 = 0{,}18214$

   (d) Soll gelten: $P_{n=?,p=\frac{4}{25}}(k \geq 1) > 0{,}99$, also $1 - P_{n=?,p=0{,}16}(k = 0) < 0{,}01$.
   $0{,}84^n < 0{,}01$; $n \ln 0{,}84 < \ln 0{,}01$.
   Da $\ln 0{,}84$ negativ ist, ändert sich beim Dividieren das Ungleichungszeichen: $n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}84} \approx 26{,}4$, also mindestens 27.
   (e) $\mu = np = 200 \cdot \frac{10}{25} = 200 \cdot 0{,}4 = 80$. $\quad B(200; 0{,}4; 80) = 0{,}05751$.
   $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 6{,}9282$.
   $P_{n=200,p=0{,}4}(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = P_{n=200,p=0{,}4}(74 \leq k \leq 86) =$
   $P_{n=200,p=0{,}4}(k \leq 86) - P_{n=200,p=0{,}4}(k \leq 73) = 0{,}82607 - 0{,}17423 = 0{,}65184$