



12. Klasse Lösungen (alter LP)	12
Lagebeziehung Ebene – Ebene	10

1.

- (a) E_1 und E_2 schneiden sich (Normalvektoren sind nicht Vielfache).

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \quad | \cdot 4$$

$$4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9 \quad |$$

$$12x_1 - 5x_2 = 33$$

$$x_1 = \lambda$$

$$12\lambda - 5x_2 = 33, \text{ also } x_2 = 2,4\lambda - 6,6$$

$$2\lambda - (2,4\lambda - 6,6) - 2x_3 = 6; x_3 = 0,3 - 0,2\lambda$$

Schnittgerade:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6,6 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2,4 \\ -0,2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Schnittwinkel: $\cos \varphi =$

$$\frac{|2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 8|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{16+1+64}} = \frac{7}{27}; \varphi \approx 74,97^\circ.$$

- (b) E_1 und E_2 sind echt parallel (denn $E_2 | \cdot (-2)$ ergibt $2x_1 - x_2 - 2x_3 = -12$).

$$\text{HNF von } E_1: |\vec{n}_1| = \sqrt{4+1+4} = 3,$$

$$\text{also } E_1: \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - 2x_3 - 6) = 0.$$

Punkt auf E_2 : $P(0|0|6)$. Abstand:

$$d(E_1, E_2) = \left| \frac{1}{3}(0 - 0 - 2 \cdot 6 - 6) \right| = 6.$$

- (c) E_1 und E_2 sind identisch (denn Mult. der E_2 -Gleichung mit 4 ergibt E_1).

2.

F muss in Ri. der Geraden und in Ri. des Normalvektors der Ebene E verlaufen, also

$$\text{Normalvektor } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ und } F$$

enthält den Geraden-Aufpunkt $A(1|1|-1)$.

Ansatz: $F: 7x_1 - x_2 + 3x_3 = d$, A einsetzen:

$$7 - 1 - 3 = d, \text{ also } F: 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 3.$$

3.

$$(a) E_{BCT}: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\sqrt{2} \\ 6\sqrt{6} \\ -6\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ansatz $18\sqrt{2}x_1 + 6\sqrt{6}x_2 - 6\sqrt{3}x_3 = d$, $B(-6|0|0)$ einsetzen: $d = -108\sqrt{2}$.

Division durch $6\sqrt{3}$ ergibt E_{BCT} : $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = -6\sqrt{6}$, also mit E_{ASC} paralleler Normalvektor.

- (b) Ansatz für die Parallelebene: $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = d$, Einsetzen von Q liefert $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = -6\sqrt{6}$.

Einsetzen von $B \rightarrow$ wahre Aussage.

- (c) HNF von E_{ASD} : $|\vec{n}| = \sqrt{6+2+1} = 3$, also $E_{ASD}: \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = 0$. HNF von $E_{ABS}: x_3 = 0$.

Für Punkte P mit gleichem Abstand von E_{ABS} und E_{ASD} gilt $d(P, E_{ABS}) = d(P, E_{ASD})$, also (mit HNF): $|\frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3)| = |x_3|$.

Winkelhalbierende Ebenen also:

$$E_{W1}: \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = +x_3,$$

$$\text{d. h. } \sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - 4x_3 = 0 \text{ und}$$

$$E_{W2}: \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = -x_3, \text{ d. h.}$$

$$\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2x_3 = 0 \text{ (wobei } M \in E_{W2}).$$

- (d) D' wird als allgemeiner Geradenpunkt von p angesetzt: $D'(2 - \lambda | \sqrt{3}\lambda | 0)$.

$$\overrightarrow{AD'} \perp \overrightarrow{SD'}, \text{ also } \overrightarrow{AD'} \circ \overrightarrow{SD'} = 0, \text{ also}$$

$$(2 - \lambda) \cdot (2 - \lambda + 3) + \sqrt{3}\lambda \cdot (\sqrt{3}\lambda - 3\sqrt{3}) + 0 = 0, \text{ also } 4\lambda^2 - 16\lambda + 10 = 0.$$

- (e) x_1x_3 -Ebene: $x_2 = 0$. $E_{TDC}: x_3 = 2\sqrt{6}$.

Bei diesem unterbestimmten Gleichungssystem liegen x_2 und x_3 bereits fest. Frei wählbar ist also nur $x_1 = \lambda$.

Somit:

$$YZ: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (f) $V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot \text{Volumen der Pyramide } ABCDT = 2 \cdot \frac{1}{3} \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$, wobei Grundfläche = Quadratfläche und Höhe = Abstand des Punktes T von der Ebene E_{ABD} (mit Hilfe der HNF).

Volumen der Pyramide $ABYZT = \frac{1}{3} \text{Trapez-Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$, wobei die Höhe wieder als Abstand des Punktes T von der Trapez-Ebene $x_2 = 0$ gesehen werden kann.

Der prozentuale Anteil wird dann als Bruch $\frac{V_{\text{Pyr}}}{V_{\text{Oktaeder}}}$ berechnet.