11. Klasse Lösungen — 11
Funktionseigenschaften — 01

1. (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to \pm\infty.$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to -\infty.$

   (c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-2+\frac{1}{x}}{-2+\frac{1}{x}} \to \mp\infty.$ (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0.$

   (e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$ (denn z. B. $-3\cdot 0{,}1^{-100} = -3\cdot(\frac{1}{10})^{-100} = -3\cdot 10^{100}$), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

   (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0{,}3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to +\infty.$ (g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to -5.$

   (h) Hier ist zwar $f(1\,000\,000) = (10^6)^2 - 10^{-10}\cdot(10^6)^3 = 10^{12} - 10^{-10+18} = +999\,900\,000\,000$, jedoch ist wegen „$-x^3$“ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to -\infty.$

2. (a) P: $f(-x) = (-x)^{11} - (-x)^5 + 2(-x) = -x^{11} + x^5 - 2x = -(x^{11} - x^5 + 2x) = -f(x).$

   (b) A: $f(-x) = (-x)^6 - 9(-x)^4 = x^6 - 9x^4 = f(x).$

   (c) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^4-3x^2}$, also A: $f(-x) = \frac{(-x)^4+1}{(-x)^4-3(-x)^2} = \frac{x^4+1}{x^4-3x^2} = f(x).$

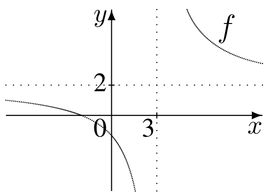
   (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x^2} = \frac{x^2-1}{x^2(x-3)}$ hat Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0;3\}$; der Funktionsgraph kann also nicht symmetrisch sein, da schon D_f nicht symmetrisch ist.
   Sichtbar ist die Nicht-Symmetrie auch an einem Gegenbeispiel, z. B. $f(-2) = \frac{4-1}{-8-3\cdot 4} = -\frac{3}{20}$, aber $f(2) = \frac{4-1}{8-3\cdot 4} = -\frac{3}{4}$.

   (e) sin ist punktsymmetrisch zum Ursprung, cos achsensymmetrisch zur y-Achse.

   (f) P: $f(-x) = (\sin(-x)\cdot\cos(-x))^3 = (-\sin x\cdot\cos x)^3 = -(\sin x\cdot\cos x)^3 = -f(x).$

3. Nullstelle: $f(x) = 0$ liefert $2x + 4 = 0$, also $x = -2$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2.$

   $f(3{,}01)$: Im Zähler etwas mehr als 10, im Nenner $0,01$, also sehr großer Funktionswert.
   $f(2{,}99)$: Im Zähler fast 10, im Nenner $-0{,}01$, also negativer betragsmäßig sehr großer Funktionswert (Graph nach unten $\to -\infty$).

   $f(x) - 2 = \frac{2x+4}{x-3} - 2 = \frac{2x+4}{x-3} - \frac{2(x-3)}{x-3} = \frac{2x+4-(2x-6)}{x-3} = \frac{10}{x-3}$;
   wenn für große x-Werte also $|f(x) - 2| < 0{,}1$ gilt, so muss also $\frac{10}{x-3} < 0{,}1$ gelten, also $\frac{10}{0{,}1} < x - 3$, somit $x > 103 = x_0$.

4. (a) Nahtstelle $x = -5$:
   Von links: $\lim\limits_{x\to-5-0} f(x) = (-2)\cdot(-5) - 10 = 0.$
   Von rechts und Funktionswert: $\lim\limits_{x\to-5+0} f(x) = 2\cdot(-5) + 10 = 0 = f(-10).$
   f ist also stetig.

   (b) Nahtstelle $x = 1000$:
   Von links und Funktionswert: $\lim\limits_{x\to 1000-0} f(x) = 0{,}19\cdot 1000 = 190 = f(1000).$
   Von rechts: $\lim\limits_{x\to 1000+0} f(x) = g + 0{,}15\cdot 1000 = g + 150.$
   f ist stetig, falls $g + 150 = 190$, falls also $g = 40$, andernfalls nicht stetig.