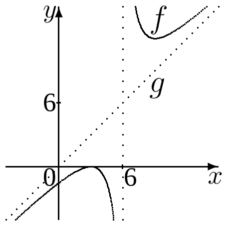
11. Klasse Lösungen — 11
Kompakt-Überblick zum Grundwissen — K

1.
$D_f = \mathbb{R}\setminus\{6\}$. $\lim\limits_{x\to 6\pm 0} \frac{(x-3)^2}{x-6} = \text{"}\frac{9}{\pm 0)}\text{"} \to \pm\infty$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-6x+9}{x-6} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-6+\frac{9}{x}}{1-\frac{6}{x}} \to \pm\infty$.
Wegen „Zählergrad = Nennergrad+1“ gibt es eine schräge Asymptote mit Term $g(x)$:
$f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x-6} =$
$= \underbrace{x}_{g(x)} + \underbrace{\frac{9}{x-6}}_{\to 0 \text{ für } x\to\pm\infty}$.
Skizze mit der (Zähler!) doppelten Nst $x=3$:



2.
(a) b hat einen Knick bei $x = 11$, so dass dort die Tangente nicht definiert ist.
(b) $f'(x) = -2x + 7$.
(c) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

3.
$f'(x) = 6x^2 - 24x + 25$. $P(1|-5)$.
Tangentensteigung $m = f'(1) = 7$.
Tangenten-Ansatz $y = mx + t = 7x + t$.
P einsetzen: $-5 = 7 + t$, also $t = -12$.
Somit Tangente $y = 7x - 12$.
Keine Extrema: $f'(x) = 6x^2 - 24x + 25 = 0$, also $x_{1/2} = \frac{24\pm\sqrt{576-4\cdot 6\cdot 25}}{2\cdot 6}$ ↯. Da $f'(x) > 0$ für alle x, ist f streng monoton steigend.
Nullstelle: Newton-Verfahren (Startwert, dann Iterationsformel siehe Merkhilfe)

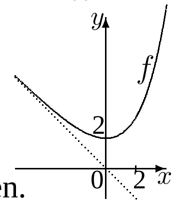
4.
f_a ist extremal, wenn der Radikand $r_a(x) = ax^2 + x + 2$ extremal ist (wegen $a > \frac{1}{8}$ eine nach oben geöffnete Parabel mit Minimum).
$r_a'(x) = 2ax + 1 = 0$ liefert $x = -\frac{1}{2a}$, somit $y = f_a(-\frac{1}{2a}) = \sqrt{\frac{a}{4a^2} - \frac{1}{2a} + 2} = \sqrt{2 - \frac{1}{4a}}$.
Also Min$(-\frac{1}{2a}|\sqrt{2-\frac{1}{4a}})$.
Für $a = 0$: Funktionsgleichung $y = \sqrt{x+2}$.
Variablentausch: $x = \sqrt{y+2}$.
$x^2 = y + 2$, also $y = x^2 - 2 = f_0^{-1}(x)$

5.
$f_1'(x) = 2\sin x + (2x-6)\cos x$.
$f_2'(x) = -(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 6\cdot(-1)x^{-2})\cdot\sin(\sqrt{x} - \frac{6}{x})$
$f_3'(x) = \frac{(x-1)^2\cdot 1-(x-3)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-x+5}{(x-1)^3}$.

6.
$\lim\limits_{x\to-\infty} (\underbrace{2e^{0,5x}}_{\to 0} - x) \to \infty$, schräge As. $y = -x$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(\frac{2e^{0,5x}x}{x} - 1)}_{\to\infty} \cdot \underbrace{x}_{\to\infty} \to \infty$
$f'(x) = e^{0,5x} - 1 = 0$; $x = 0$.

$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$
fällt	0	steigt

Min$(0|2)$
$W_f = [2;\infty[$. Keine Nullstellen.



7.
D_f: $-4 - 2x > 0$, also $D_f =]-\infty;-2[$.
$f'(x) = \frac{1}{-4-2x}\cdot(-2) = \frac{1}{x+2}$.
Nullstelle: $-4 - 2x = e$; $x = \frac{-4-e}{2}$.

8.
Max$(0|2)$ liefert $f(0) = 2$, d. h. $d = 2$
und $f'(0) = 0$, d. h. $c = 0$
Min: $f(\frac{4}{3}) = \frac{22}{27}$, d. h. $\frac{64}{27}a + \frac{16}{9}b + \frac{4}{3}c + d = \frac{22}{27}$
und $f'(\frac{4}{3}) = 0$, d. h. $3\cdot\frac{16}{9}a + 2\cdot\frac{4}{3}b + c = 0$
Der Punkt mit kleinstem Abstand von O sei $P(x|y)$. Suche Minimum von $d(x) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + (x^3 - 2x^2 + 2)^2}$.

9.
$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 22-2 \\ 9-(-3) \\ 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$,
also $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{20^2 + 12^2 + 9^2} = 25$.
Ebenso $\overline{AD} = \overline{AE} = 25$.
$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD} = 20\cdot 15 + 12\cdot(-16) + 9\cdot(-12) = 0$, also $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$. Ebenso $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AE}$.
$\vec{G} = \vec{D} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ ergibt $G(37|8|-23)$.
Vektor $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ steht auf $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ senkrecht (also Vielfaches von $\overrightarrow{AE}$), seine Länge = Fläche des davon aufgespannten Parallelogramms (hier: Quadrat $ABCD$).
$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AG}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AG}\right|} = \frac{20\cdot 35 + 12\cdot 11 + 9\cdot(-23)}{25\cdot\sqrt{35^2 + 11^2 + (-23)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
also $\varphi \approx 55°$

10.
$A = \{(-2,2), (-1,1), (1,-1), (2,-2)\}$, also $P(A) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{9}$.
$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$
$A\cap B = \{(-1,1), (1,-1)\}$; $P(A\cap B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{9} = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2} = P(A)\cdot P(B)$, q. e. d.