



11. Klasse Lösungen	11
Kompakt-Überblick zum Grundwissen	K

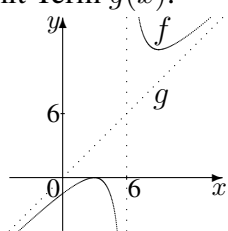
1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{6\}$. $\lim_{x \rightarrow 6 \pm 0} \frac{(x-3)^2}{x-6} = \frac{9}{\pm 0} \rightarrow \pm \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x-6} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x - 6 + \frac{9}{x}}{1 - \frac{6}{x}} \rightarrow \pm \infty$$

Wegen „Zählergrad = Nennergrad+1“ gibt es eine schräge Asymptote mit Term $g(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x-6} = \underbrace{x}_{g(x)} + \underbrace{\frac{9}{x-6}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm \infty}$$

Skizze mit der (Zähler!) doppelten Nst $x = 3$:



- 2.
- (a) b hat einen Knick bei $x = 11$, so dass dort die Tangente nicht definiert ist.
 - (b) $f'(x) = -2x + 7$.
 - (c) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

3. $f'(x) = 6x^2 - 24x + 25$. $P(1 | -5)$.

Tangentensteigung $m = f'(1) = 7$.

Tangenten-Ansatz $y = mx + t = 7x + t$.

P einsetzen: $-5 = 7 + t$, also $t = -12$.

Somit Tangente $y = 7x - 12$.

Keine Extrema: $f'(x) = 6x^2 - 24x + 25 = 0$, also $x_{1/2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 6 \cdot 25}}{2 \cdot 6} \nexists$. Da $f'(x) > 0$ für alle x , ist f streng monoton steigend.

Nullstelle: Newton-Verfahren (Startwert, dann Iterationsformel siehe Merkhilfe)

4. $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 22 - 2 \\ 9 - (-3) \\ 9 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$,

also $|\vec{AB}| = \sqrt{20^2 + 12^2 + 9^2} = 25$.

Ebenso $|\vec{AD}| = |\vec{AE}| = 25$.

$\vec{AB} \circ \vec{AD} = 20 \cdot 15 + 12 \cdot (-16) + 9 \cdot (-12) = 0$, also $\vec{AB} \perp \vec{AD}$. Ebenso $\vec{AB} \perp \vec{AE}$, $\vec{AD} \perp \vec{AE}$.

$\vec{G} = \vec{D} + \vec{AB} + \vec{AE}$ ergibt $G(37 | 8 | -23)$.

Vektor $\vec{AB} \times \vec{AD}$ steht auf \vec{AB} und \vec{AD} senkrecht (also Vielfaches von \vec{AE}), seine Länge = Fläche des davon aufgespannten Parallelogramms (hier: Quadrat $ABCD$).

$\cos \varphi = \frac{|\vec{AB} \circ \vec{AG}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AG}|} = \frac{20 \cdot 35 + 12 \cdot 11 + 9 \cdot (-23)}{25 \cdot \sqrt{35^2 + 11^2 + (-23)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $\varphi \approx 55^\circ$

5. f_a ist extremal, wenn der Radikand $r_a(x) = ax^2 + x + 2$ extremal ist (wegen $a > \frac{1}{8}$ eine nach oben geöffnete Parabel mit Minimum).

$r'_a(x) = 2ax + 1 = 0$ liefert $x = -\frac{1}{2a}$, somit

$$y = f_a(-\frac{1}{2a}) = \sqrt{\frac{a}{4a^2} - \frac{1}{2a} + 2} = \sqrt{2 - \frac{1}{4a}}$$

Also $\text{Min}(-\frac{1}{2a} | \sqrt{2 - \frac{1}{4a}})$.

Für $a = 0$: Funktionsgleichung $y = \sqrt{x + 2}$.

Variablentausch: $x = \sqrt{y + 2}$.

$$x^2 = y + 2, \text{ also } y = x^2 - 2 = f_0^{-1}(x)$$

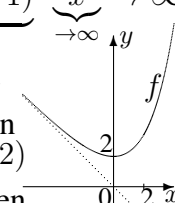
- 6.
- $f'_1(x) = 2 \sin x + (2x - 6) \cos x$.
 - $f'_2(x) = -(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 6 \cdot (-1)x^{-2}) \cdot \sin(\sqrt{x} - \frac{6}{x})$
 - $f'_3(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot 1 - (x-3) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-x+5}{(x-1)^3}$.

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{0,5x} - x) \rightarrow \infty$, schräge As. $y = -x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(2e^{0,5x} - 1)}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{x}_{\rightarrow \infty} \rightarrow \infty$$

$$f'(x) = e^{0,5x} - 1 = 0; x = 0.$$

$f'(x) < 0$ fällt, $f'(x) > 0$ steigt, $\text{Min}(0 | 2)$



$W_f = [2; \infty[$. Keine Nullstellen.

8. $D_f: -4 - 2x > 0$, also $D_f =] - \infty; -2[$.

$$f'(x) = \frac{1}{-4-2x} \cdot (-2) = \frac{1}{x+2}$$

Nullstelle: $-4 - 2x = 1; x = -2,5$.

9. $A = \{(-2, 2), (-1, 1), (1, -1), (2, -2)\}$, also $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$. $P(B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$

$$A \cap B = \{(-1, 1), (1, -1)\}; P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B), \text{ q. e. d.}$$

10. $\text{Max}(0 | 2)$ liefert $f(0) = 2$, d. h. $d = 2$ und $f'(0) = 0$, d. h. $c = 0$

$\text{Min}: f(\frac{4}{3}) = \frac{22}{27}$, d. h. $\frac{64}{27}a + \frac{16}{9}b + \frac{4}{3}c + d = \frac{22}{27}$ und $f'(\frac{4}{3}) = 0$, d. h. $3 \cdot \frac{16}{9}a + 2 \cdot \frac{4}{3}b + c = 0$

Der Punkt mit kleinstem Abstand von O sei $P(x|y)$. Suche Minimum von $d(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (x^3 - 2x^2 + 2)^2}$.