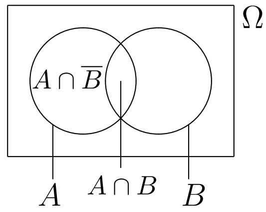
11. Klasse Lösungen (alter LP) — 11

Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit — 09

1. Betrachtet man das nebenstehende Diagramm, so sieht man $A \cup B = (\underbrace{A \cap \overline{B}}_{E_1}) \cup \underbrace{B}_{E_2}$, wobei dann $E_1 \cap E_2 = \{\}$, wende also Axiom (3) an: $P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B)$.
   Ebenso ist $A = (\underbrace{A \cap \overline{B}}_{E_1}) \cup (\underbrace{A \cap B}_{E_2})$ disjunkt und somit

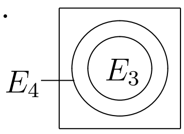
   $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$, also $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.
   Hieraus folgt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
2. (a) V: Vorderlicht defekt. R: Rücklicht defekt.
   Vierfeldertafel: Man macht sich zuerst klar, dass die W. von mindestens einem Defekt $P(R \cup V)$ durch drei der Felder gegeben ist, so dass für das vierte Feld $P(\overline{R} \cap \overline{V}) = 1 - 0{,}09$ bleibt. Zeilen- und spaltenweise können die restlichen Felder ergänzt werden.

	V	$\overline{V}$	
R	0,003	0,057	0,06
$\overline{R}$	0,03	0,91	0,94
	0,033	0,967	1

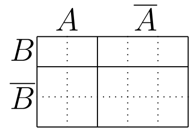
   Man erkennt die Abhängigkeit: $P(V) \cdot P(R) = 0{,}033 \cdot 0{,}06 \neq 0{,}003 = P(V \cap R)$.

   (b) Im Fall von Unabhängigkeit müsste für die gegebene Größe gelten:
   $P(R \cap \overline{V}) = P(R) \cdot P(\overline{V})$, also $0{,}057 = 0{,}06 \cdot P(\overline{V})$, also $P(\overline{V}) = \frac{0{,}057}{0{,}06} = 0{,}95$, also $P(\overline{R} \cap \overline{V}) = 0{,}94 \cdot 0{,}95 = 0{,}893$, also $P(R \cup V) = 1 - 0{,}893 = 0{,}107$.
3. $\overline{E_3}$: „Frühestens der 4. Besucher wünscht Currywurst“ oder „Die ersten 3 Besucher wünschen nicht Currywurst.

   $\overline{E_3} \cap E_4$: „Der vierte Besucher ist der erste, der Currywurst wünscht“.
   $P(\overline{E_3}) = 1 - P(E_3) = 1 - (1 - 0{,}6^3) = 0{,}216$.
   Es ist E_3 Teilmenge von E_4 und daher

   $P(\overline{E_3} \cap E_4) = P(E_4) - P(E_3) = 1 - 0{,}6^4 - (1 - 0{,}6^3) = 0{,}0864$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = 0{,}6$.
   A, B unabhängig: $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} = P(A \cap B)$.
   Im Bild ist dies daran erkennbar, dass die „Teilungslinie“ auf gleicher Höhe verläuft, was bedeutet, dass der Anteil der B unter den A (also $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$) gleich dem Anteil der B unter der Gesamtmenge ist ($= P(B)$).

5. (a) $\Omega = \{1111, \ldots, 7777\}$, also (Zählprinzip → grund55.pdf): $|\Omega| = 7^4 = 2401$.
   Für die Anordnungsmöglichkeiten der gleichen Ziffern gibt es 6 Möglichkeiten (11xy, 1x1y, 1xy1, x11y, x1y1, xy11).
   Es gibt 7 Möglichkeiten für die Wahl der beiden gleichen Ziffern, dann noch 6 Möglichkeiten für die zweite und dann noch 5 Möglichkeiten für die dritte Ziffer.
   Also $|Z| = 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1260$, somit $P(Z) = \frac{1260}{2401} \approx 0,525$.

   (b) Es gibt 4 ungerade Ziffern 1, 3, 5, 7, also $P(U) = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}$.
   Entsprechend zu Teilaufgabe (a) überlegt man: $|U \cap Z| = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$.
   $P(U \cap Z) = \frac{144}{2401} \approx 0{,}060$, aber $P(U) \cdot P(Z) = \frac{256}{2401} \cdot \frac{1260}{2401} \approx 0{,}056$. Also sind U und Z abhängige Ereignisse.

   (c) $P_Z(U) = \frac{P(U \cap Z)}{P(Z)} = \frac{144}{1260} \approx 0{,}114$.