11. Klasse Lösungen — 11
ln-Funktion — 08

1.

(a) D: $4x+10>0$; $x>-2{,}5$;
$D=]-2{,}5;\infty[$.
$f_1'(x)=\frac{1}{4x+10}\cdot 4=\frac{2}{2x+5}$

(b) D: $-x>0$; $x<0$; $D=]-\infty;0[$.
$f_2'(x)=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$

(c) D: $x^2>0$; $x\neq 0$; $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
$f_3'(x)=3\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{6}{x}$
(oder mit $f_3(x)=3\cdot 2\ln(x)$)

(d) D: $x>0$, $D=\mathbb{R}^+=]0;\infty[$.
$f_4'(x)=(x-e)\cdot\frac{1}{x}+1\cdot\ln x$

(e) D: $v(x)=\frac{2x+5}{x-1}>0$.
Vorzeichenbereiche (vgl. grund107.pdf):

$v>0$ | $v<0$ | $v>0$
$-2{,}5$ 1

Also $D=]-\infty;-2{,}5[\cup]1;\infty[$.

$f_5(x)=\ln(2x+5)-\ln(x-1)$
$f_5'(x)=\frac{1}{2x+5}\cdot 2-\frac{1}{x-1}$

(f) D: $7-x>0$; $x<7$; $D=]-\infty;7[$.
$f_6'(x)=e^x\cdot\frac{1}{7-x}\cdot(-1)+e^x\cdot\ln(7-x)$

((d) und (f) Ableitung mit Produktregel)

2.
Produktregel:
$F'(x)=x\frac{1}{x}+1\cdot\ln x-1=\ln x=f(x)$
$h(x)=\log_{10}x=\frac{\ln x}{\ln 10}$, also
Stammfunktion $H(x)=\frac{1}{\ln 10}\cdot(x\ln x-x)+C$
und Ableitung $h'(x)=\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{x}$.

3.

(a) $F(x)=2x-7\ln x+C$

(b) $g(x)=\frac{x-11}{x^2}=\frac{1}{x}-11x^{-2}$, also
$G(x)=\ln x+11x^{-1}$

4.

(a) $\ln x=-2$; $x=e^{-2}$

(b) $\ln(x^2-1)=10$; $x^2-1=e^{10}$;
$x_{1/2}=\pm\sqrt{e^{10}+1}$

(c) $0{,}9<1-0{,}99^x$; $0{,}99^x<0{,}1$;
$\ln 0{,}99^x<\ln 0{,}1$; $x\ln 0{,}99<\ln 0{,}1$;
$x>\frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}99}$; $x>229{,}1\ldots$

5.
$f(x)=\ln(\frac{x}{x-1})=\ln x-\ln(x-1)$,
$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{x(x-1)}-\frac{x}{x(x-1)}=$
$=\frac{x-1-x}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)}<0$ für alle $x\in D_f=]1;\infty[$, also ist f in diesem Bereich streng monoton fallend und daher umkehrbar.
$y=\ln(\frac{x}{x-1})$;
$x\leftrightarrow y$:
$x=\ln(\frac{y}{y-1})$;
$e^x=\frac{y}{y-1}$;
$(y-1)e^x=y$;
$ye^x-e^x-y=0$;
$y(e^x-1)=e^x$;
$y=\frac{e^x}{e^x-1}$; $\qquad f^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$.

6.
$D_f=\mathbb{R}^+=]0;\infty[$.
Nullstellen: $f(x)=(x+2)\ln x=0$;
$(x+2)=0$ oder $\ln x=0$;
$x=-2$ oder $x=1$; da -2 nicht im Definitionsbereich liegt, bleibt nur Nullstelle $x=1$.
$\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)\to-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\to\infty$.

Produktregel: $f'(x)=(x+2)\cdot\frac{1}{x}+1\cdot\ln x$.
Tangente im Punkt $P(2;4\ln 2)$:
$m=f'(2)=2+\ln 2$.
Also Ansatz $y=(2+\ln 2)x+t$.
P: $4\ln 2=(2+\ln 2)\cdot 2+t$, also $t=2\ln 2-4$.
Somit Tangente: $y=(2+\ln 2)x+2\ln 2-4$.

Aufgrund der Limites gehört zu f der Graph C. Sowohl A als auch die um 3 Einheiten nach oben verschobene Funktion B sind Stammfunktionen, da deren Steigungsverhalten durch das Vorzeichen von f richtig beschrieben wird.

F ist Stammfunktion, denn (Produktregel):
$F'(x)=$
$=(0{,}5x^2+2x)\frac{1}{x}+(x+2)\ln x-0{,}5x-2=$
$=(0{,}5x+2)+(x+2)\ln x-0{,}5x-2=$
$=(x+2)\ln x=f(x)$.
$\lim\limits_{x\to 0+0}F(x)=0$ (denn das Polynom $0{,}5x^2+2x$ konvergiert stärker als die ln-Funktion).