11. Klasse Lösungen (alter LP) | 11
e-Funktion | 07

1.

(a) $f_1'(x) = 5e^{5x-3}$ (Kettenregel)

(b) $f_2'(x) = -e^{-x}$ (Kettenregel)

(c) $f_3'(x) = (x^2-2)e^x + 2xe^x =$
$= (x^2+2x-2)e^x$ (Produktregel)

(d) $f_4'(x) = \frac{(e^x+1)2e^{2x}-(e^{2x}-1)e^x}{(e^x+1)^2} =$
$= \frac{e^{3x}+2e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}$ (Quotientenregel)

(e) $f_5'(x) = e^{x\sin x}\cdot(\sin x + x\cos x)$

(f) $f_6'(x) = 1\cdot e^{\sin x} + xe^{\sin x}\cdot\cos x =$
$= (1+x\cos x)e^{\sin x}$

((e) und (f) mit Produkt- und Kettenregel)

2.

(a) $F(x) = e^{3x} + C$

(b) $G(x) = 2e^{3x+1} + C$

(c) $H(x) = -e^{-x^2} + C$

(Probe durch Differenzieren bestätigt die Richtigkeit des jeweiligen Ansatzes)

3.

(a) Beidseitiges Logarithmieren liefert: $x = \ln 10 \approx 2{,}3$

(b) Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also $11x - 12 = 0$ oder $e^{13x-14} = 0$; da die e-Funktion nie 0 wird, bleibt nur $x = \frac{12}{11}$.

(c) e^x ausklammern: $(5x + x^2 + 4)e^x = 0$.

Wieder kann e^x nicht 0 werden, also bleibt $x^2 + 5x + 4 = 0$, $x_{1/2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$, also $x_1 = -1$, $x_2 = -4$.

(d) Wir schreiben $e^{2x} = (e^x)^2$, bringen alles auf eine Seite und klammern e^x aus: $(e^x)^2 - 3e^x = 0$; $e^x(e^x-3) = 0$.

Wieder e^x nicht 0, also $e^x - 3 = 0$, $e^x = 3$, $x = \ln 3 \approx 1{,}1$.

4.

(a) Zunahme um 2,1 % heißt Mult. mit $a = 1{,}021$, also $g(t) = 2{,}75\cdot 1{,}021^t$.

40 Jahre nach 1990 ergibt sich $g(40) = 2{,}75\cdot 1{,}021^{40} \approx 6{,}31$.

(Fortsetzung 4.)

(b) $g(t) = 2{,}75\cdot 1{,}021^t = 2{,}75\cdot e^{\ln(1{,}021^t)} =$
$= 2{,}75e^{t\cdot\ln 1{,}021} = e^{kt}$
mit $k = \ln 1{,}021 \approx 0{,}021$.

$g'(t) = 2{,}75\cdot\ln 1{,}021\cdot e^{\ln 1{,}021t}$, also $g'(40) = \ldots\cdot e^{\ln 1{,}021\cdot 40} \approx 0{,}13$.
$g'(40)$ beschreibt die Änderungsrate im Jahr 2030, d.h. um wie viele Milliarden Tonnen der CO_2-Ausstoß im Jahr 2030 pro Jahr zunimmt.

(c) $h(0) = 2{,}75 = g(0)$.

$g'(0) = 2{,}75\cdot\ln 1{,}021\cdot 1 \approx 0{,}057$,
$h'(t) = -1{,}42\cdot(-0{,}041)e^{-0{,}04t}$, also
$h'(0) = -1{,}42\cdot(-0{,}041)\cdot 1 \approx g'(0)$.

Die Werte von $g'(t)$ werden mit zunehmendem t immer größer, d. h. die Kurve g wird immer steiler; dagegen werden die (positiven) Werte von $h'(t)$ immer kleiner, d. h. die Kurve h steigt zwar, wird aber immer flacher; $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) \to \infty$, aber h nähert sich einem Grenzwert: $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = 4{,}17$.

5.

Nullstellen: $f(x) = (0{,}5-x)e^{1-x} = 0$;
e-Fkt. nicht 0, also $0{,}5 - x = 0$; $x = 0{,}5$.
Extrema: Produktregel: $f'(x) = (-1)e^{1-x} + (0{,}5-x)e^{1-x}\cdot(-1) = (-1-0{,}5+x)e^{1-x}$;
$f'(x) = 0$; $x = 1{,}5$.

$f' < 0$		$f' > 0$
fällt	1,5	steigt

Also Min $(1{,}5|-e^{-0{,}5}) \approx (1{,}5|-0{,}61)$.
Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{(0{,}5-x)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{1-x}}_{\to+\infty} \to +\infty$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(0{,}5-x)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{1-x}}_{\to 0} = 0$ (denn e-Fkt. konvergiert stärker); also $y = 0$ (x-Achse) waagrechte Asymptote für $x \to +\infty$.

$f(0) = 0{,}5e \approx 1{,}36$
$f(1) = -0{,}5$