



11. Klasse Lösungen	11
In-Funktion	07

1.

- (a) D: $4x + 10 > 0$; $x > -2,5$;
 $D =] - 2,5; \infty[$.
 $f'_1(x) = \frac{1}{4x+10} \cdot 4 = \frac{2}{2x+5}$
- (b) D: $-x > 0$; $x < 0$; $D =] - \infty; 0[$.
 $f'_2(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$
- (c) D: $x^2 > 0$; $x \neq 0$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 $f'_3(x) = 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6}{x}$
(oder mit $f_3(x) = 3 \cdot 2 \ln(x)$)
- (d) D: $x > 0$, $D = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[$.
 $f'_4(x) = (x - e) \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x$
- (e) D: $v(x) = \frac{2x+5}{x-1} > 0$.
Vorzeichenbereiche (vgl. grund107.pdf):
 $\frac{v > 0}{-2,5} \quad \frac{v < 0}{1} \quad \frac{v > 0}{1}$
Also $D =] - \infty; -2,5[\cup]1; \infty[$.
 $f_5(x) = \ln(2x + 5) - \ln(x - 1)$
 $f'_5(x) = \frac{1}{2x+5} \cdot 2 - \frac{1}{x-1}$
- (f) D: $7 - x > 0$; $x < 7$; $D =] - \infty; 7[$.
 $f'_6(x) = e^x \cdot \frac{1}{7-x} \cdot (-1) + e^x \cdot \ln(7 - x)$

((d) und (f) Ableitung mit Produktregel)

2.

Produktregel:

$$F'(x) = x^{\frac{1}{x}} + 1 \cdot \ln x - 1 = \ln x = f(x)$$

$$h(x) = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}, \text{ also}$$

$$\text{Stammfunktion } H(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot (x \ln x - x) + C$$

$$\text{und Ableitung } h'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x}.$$

3.

- (a) $F(x) = 2x - 7 \ln x + C$
- (b) $g(x) = \frac{x-11}{x^2} = \frac{1}{x} - 11x^{-2}$, also
 $G(x) = \ln x + 11x^{-1}$

4.

- (a) $\ln x = -2$; $x = e^{-2}$
- (b) $\ln(x^2 - 1) = 10$; $x^2 - 1 = e^{10}$;
 $x_{1/2} = \pm \sqrt{e^{10} + 1}$
- (c) $0,9 < 1 - 0,99^x$; $0,99^x < 0,1$;
 $\ln 0,99^x < \ln 0,1$; $x \ln 0,99 < \ln 0,1$;
 $x > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,99}$; $x > 229,1 \dots$

5.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln x - \ln(x-1),$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)} < 0 \text{ für alle } x \in D_f =$$

$$]1; \infty[, \text{ also ist } f \text{ in diesem Bereich streng}$$

$$\text{monoton fallend und daher umkehrbar.}$$

$$y = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right);$$

$$x \leftrightarrow y:$$

$$x = \ln\left(\frac{y}{y-1}\right);$$

$$e^x = \frac{y}{y-1};$$

$$(y-1)e^x = y;$$

$$ye^x - e^x - y = 0;$$

$$y(e^x - 1) = e^x;$$

$$y = \frac{e^x}{e^x - 1}; \quad f^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

6.

$$D_f = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[.$$

$$\text{Nullstellen: } f(x) = (x+2) \ln x = 0;$$

$$(x+2) = 0 \text{ oder } \ln x = 0;$$

$$x = -2 \text{ oder } x = 1; \text{ da } -2 \text{ nicht im Definitio-}$$

$$\text{nsbereich liegt, bleibt nur Nullstelle } x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow -\infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \infty.$$

$$\text{Produktregel: } f'(x) = (x+2) \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x.$$

$$\text{Tangente im Punkt } P(2; 4 \ln 2):$$

$$m = f'(2) = 2 + \ln 2.$$

$$\text{Also Ansatz } y = (2 + \ln 2)x + t.$$

$$P: 4 \ln 2 = (2 + \ln 2) \cdot 2 + t, \text{ also } t = 2 \ln 2 - 4.$$

$$\text{Somit Tangente: } y = (2 + \ln 2)x + 2 \ln 2 - 4.$$

Aufgrund der Limes gehört zu f der Graph C. Sowohl A als auch die um 3 Einheiten nach oben verschobene Funktion B sind Stammfunktionen, da deren Steigungsverhalten durch das Vorzeichen von f richtig beschrieben wird.

F ist Stammfunktion, denn (Produktregel):

$$F'(x) =$$

$$= (0,5x^2 + 2x) \frac{1}{x} + (x+2) \ln x - 0,5x - 2 =$$

$$= (0,5x + 2) + (x+2) \ln x - 0,5x - 2 =$$

$$= (x+2) \ln x = f(x).$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$ (denn das Polynom $0,5x^2 + 2x$ konvergiert stärker als die \ln -Funktion).