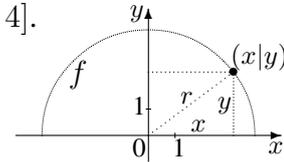


<b>11. Klasse Lösungen</b>	<b>11</b>
<b>Wurzelfunktion, Umkehrung, Parameter</b>	<b>05</b>

1. Definitionsbereich:  $16 - x^2 \geq 0$ , also  $x^2 \leq 16$ , also  $D_f = [-4; 4]$ .

Abstand des Punktes  $(x|y) = (x|f(x)) = (x|\sqrt{16 - x^2})$  vom Nullpunkt gemäß Pythagoras:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{16 - x^2})^2} = \sqrt{x^2 + 16 - x^2} = 4.$$

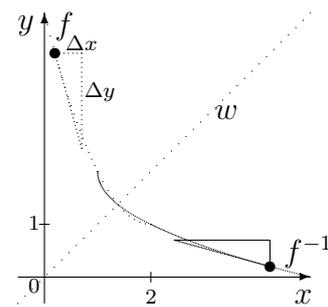


2. (a) Wegen „-“ wird die Wurzelfunktion  $y = \sqrt{x}$  an der  $x$ -Achse gespiegelt, wegen „ $x - 1$ “ um 1 nach rechts verschoben und wegen „ $+2$ “ um 2 in  $y$ -Richtung verschoben.

(b) Spiegeln an  $w$ : Aus z. B.  $(0,2|4,24)$  wird  $(4,24|0,2)$ .

(c) Eingezeichnet ist nebenstehend auch ein Steigungsdreieck sowie das gespiegelte Steigungsdreieck.

Dabei wird aus  $f'(0,2) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  beim Spiegeln  $(f^{-1})'(4,24) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ , allgemein also  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ .



3.  $y = \frac{x-3}{x+1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Den Wertebereich findet man mit Hilfe einer kleinen Skizze oder im Laufe der Aufgaben-Bearbeitung.

Variablentausch:  $x = \frac{y-3}{y+1}$ ,  $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Auflösen (mit HN multiplizieren, gesuchte Variablen-Stücke auf eine Seite):

$$x(y + 1) = y - 3; xy + x = y - 3; 3 + x = y - xy; 3 + x = y(1 - x); y = \frac{3+x}{1-x}$$

$$\text{Also: } f^{-1}(x) = \frac{3+x}{1-x}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}, W_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

4. Für die Umkehrbarkeit ist notwendig, dass man zu jedem  $y$ -Wert von  $W_f$  **genau einen**  $x$ -Wert hat. Wenn eine Funktion streng monoton ist, dann hat sie diese Eigenschaft. Hier:  $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$  für alle  $x$ , also ist die Funktion streng monoton steigend und somit umkehrbar.

5.  $p'(x) = 2x - 2$ . Steigung der Tangente in  $Q$ :  $m = p'(2) = 2$ .

Steigung der Geraden:  $f'_k(x) = 2k$ , diese muss für Parallelität gleich 2 sein:

$$2k = 2, \text{ also } k = 1.$$

6. (a)  $f'_a(x) = \frac{1}{a^2} \cdot 3x^2 - \frac{3}{a} \cdot 2x - 9 = \frac{3}{a^2}x^2 - \frac{6}{a}x - 9$ .  $f'_a(x) = 0$  liefert:

$$x_{1/2} = \frac{\frac{6}{a} \pm \sqrt{\frac{36}{a^2} - 4 \cdot \frac{3}{a^2} \cdot (-9)}}{2 \cdot \frac{3}{a^2}} = \left(\frac{6}{a} \pm \frac{12}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{6}, \text{ also } x_1 = 3a, x_2 = -a.$$

$$\begin{array}{c} f' > 0 & | & f' < 0 & | & f' > 0 \\ \text{steigt} & & \text{fällt} & & \text{steigt} \end{array}$$

Für die Vorzeichenbereiche beachte man, dass  $3a$  „links“ von  $-a$  liegt, da  $a$  negativ ist, und dass die durch die Ableitung  $f'$  gegebene Parabel (wegen  $\frac{3}{a^2} > 0$ ) nach oben geöffnet ist, also die Vorzeichenabfolge „ $+-+$ “ hat.

$$\text{Also Maximalstelle } x = 3a \text{ mit } y\text{-Wert } f_a(3a) = \frac{1}{a^2} \cdot (3a)^3 - \frac{3}{a} \cdot (3a)^2 - 9 \cdot 3a + 5(a + 1) = 27a - 27a - 27a + 5a + 5 = -24a + 5.$$

(b) Löst man die Gleichung für den  $x$ -Wert des Maximums  $x = 3a$  nach  $a$  auf (also  $a = \frac{x}{3}$ ) und setzt in die Gleichung für den  $y$ -Wert  $y = -24a + 5$  ein, so erhält man  $y = -24 \cdot \frac{x}{3} + 5 = -8x + 5$ . Die Maxima liegen also alle auf der Geraden  $y = -8x + 5$ .