11. Klasse Lösungen (alter LP) — 11

Steckbriefaufgabe, Optimierung — 10

1. Steigungsdreieck $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2013-2014}{2012-2015} = \frac{1}{3}$. Ansatz also: $y = \frac{1}{3}x + t$
   P einsetzen: $2013 = \frac{1}{3} \cdot 2012 + t \Rightarrow t = 1342\frac{1}{3}$. Also Geradengl.: $y = \frac{1}{3}x + 1342\frac{1}{3}$.

2. Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, also $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

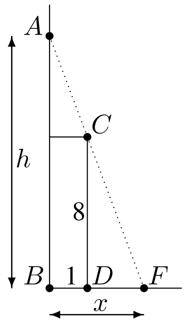
   Punkt $(1|-64)$, also $f(1) = -64$: $a + b + c + d = -64$.
   Waagrechte Tangente bei $x = 1$, also $f'(1) = 0$: $3a + 2b + c = 0$.
   Nullstelle $x = 5$, also $f(5) = 0$: $125a + 25b + 5c + d = 0$.
   Punkt $(0|-65)$, also $f(0) = -65$: $d = -65$.

   Gleichungssystem nach Einsetzen von $d = -65$:
   $a + b + c = 1 \quad | \cdot(-1) \quad | \cdot(-5)$
   $3a + 2b + c = 0 \quad | \cdot 1$
   $\underline{125a + 25b + 5c = 65 \quad | \cdot 1}$
   $2a + b = -1 \quad | \cdot(-20)$
   $\underline{120a + 20b = 60 \quad | \cdot 1}$
   $80a = 80$.

   Also $a = 1$, also (aus $2a + b = -1$) $b = -3$, also (aus $a + b + c = 1$) $c = 3$.
   Somit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 65$.
   Nullstellen: $f(x) = 0$, $x_1 = 5$, Polynomdivision $(x^3 - 3x^2 + 3x - 65) : (x - 5) = x^2 + 2x + 13$.
   $x^2 + 2x + 13 = 0$ liefert wegen $x_{2/3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1}$ keine weiteren Nullstellen.

3. $f(x) = (x + a)e^{bx}$, also (Produktregel) $f'(x) = 1 \cdot e^{bx} + (x + a)e^{bx} \cdot b = (1 + bx + ab)e^{bx}$.
   Punkt $(0, 1)$, also $f(0) = 1$: $ae^0 = 1$, also $a = 1$.
   Steigung bei $x = 0$ ist 3, also $f'(0) = 3$: $1 + ab = 3$.
   Einsetzen von $a = 1$ liefert $b = 2$. Also $f(x) = (x + 1)e^{2x}$.

4. G: Zu minimieren: Leiterlänge $\overline{AF} = \sqrt{h^2 + x^2}$
   N: Dreieck ABF ähnlich zu Dreieck CDF, also $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DF}}$, d. h. $\frac{h}{x} = \frac{8}{x-1}$
   A: Aus N folgt $h = \frac{8x}{x-1}$, also $\overline{AF} = \sqrt{(\frac{8x}{x-1})^2 + x^2}$.
   Dieser Ausdruck wird minimal, wenn der Ausdruck unter der Wurzel $r(x) = (\frac{8x}{x-1})^2 + x^2 = \frac{64x^2}{(x-1)^2} + x^2 = \frac{64x^2 + x^2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^4 - 2x^3 + 65x^2}{(x-1)^2}$ möglichst klein ist.



   D: $r'(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot (4x^3 - 6x^2 + 130x) - (x^4 - 2x^3 + 65x^2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x^3 - 3x^2 + 3x - 65)}{(x-1)^3}$
   ($(x-1)$ kürzen, Zähler zusammenfassen, $2x$ ausklammern)

   E: $r'(x) = 0$ liefert $2x(x^3 - 3x^2 + 3x - 65) = 0$, also $x_1 = 0$ oder $x^3 - 3x^2 + 3x - 65 = 0$.
   Die Nullstelle von letzterem Polynom kann mit $x_2 = 5$ „geraten“ werden; weitere Nullstellen sind nicht vorhanden (→ Aufgabe 3).
   Also ist r und damit die Leiterlänge $\overline{AF}$ minimal für $x = 5$.

$r' > 0$		$r' < 0$		$r' > 0$
steigt	0	fällt	5	steigt

5. Zu optimierende Größe: $pq = p(1-p)$ (Damit ist bereits im ersten Schritt auch die Nebenbedingung $q = 1 - p$ und das Ausdrücken durch nur eine Variable geschehen).
   Umbenennung $x \leftrightarrow p$: $f(x) = x(1 - x) = x - x^2$, $x \in [0; 1]$.
   Differenzieren: $f'(x) = 1 - 2x$. Extremwerte suchen: $f'(x) = 0$; $x = \frac{1}{2}$.
   Da es sich bei f um eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen 0 und 1 handelt, ist bei $x = \frac{1}{2}$, also bei $p = \frac{1}{2}$ das obige Produkt maximal (nämlich $p(1-p) = \frac{1}{4}$).
   Wegen des Wertebereichs $[0; 1]$ gibt es daneben noch Randminima bei $p = 0$ und $p = 1$ mit minimalem Wert $p(1 - p) = 0$.