

<b>11. Klasse Lösungen</b>	<b>11</b>
<b>Steckbriefaufgabe, Optimierung</b>	<b>10</b>

1. Steigungsdreieck  $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2013 - 2014}{2012 - 2015} = \frac{1}{3}$ . Ansatz also:  $y = \frac{1}{3}x + t$   
 $P$  einsetzen:  $2013 = \frac{1}{3} \cdot 2012 + t \Rightarrow t = 1342\frac{1}{3}$ . Also Geradengl.:  $y = \frac{1}{3}x + 1342\frac{1}{3}$ .

2. Ansatz  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , also  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ .

Punkt  $(1 | -64)$ , also  $f(1) = -64$ :  $a + b + c + d = -64$ .

Waagrechte Tangente bei  $x = 1$ , also  $f'(1) = 0$ :  $3a + 2b + c = 0$ .

Nullstelle  $x = 5$ , also  $f(5) = 0$ :  $125a + 25b + 5c + d = 0$ .

Punkt  $(0 | -65)$ , also  $f(0) = -65$ :  $d = -65$ .

Gleichungssystem nach Einsetzen      Also  $a = 1$ , also (aus  $2a + b = -1$ )  $b = -3$ ,  
 von  $d = -65$ :      also (aus  $a + b + c = 1$ )  $c = 3$ .

$a + b + c = 1$      $\cdot (-1)$      $\cdot (-5)$       Somit  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 65$ .

$3a + 2b + c = 0$      $\cdot 1$

$125a + 25b + 5c = 65$      $\cdot 1$       Nullstellen:  $f(x) = 0$ ,  $x_1 = 5$ , Polynomdivisi-

$2a + b = -1$      $\cdot (-20)$       on  $(x^3 - 3x^2 + 3x - 65) : (x - 5) = x^2 + 2x + 13$ .

$120a + 20b = 60$      $\cdot 1$        $x^2 + 2x + 13 = 0$  liefert wegen  $x_{2/3} =$

$80a = 80$ .

$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1}$  keine weiteren Nullstellen.

3.  $f(x) = (x+a)e^{bx}$ , also (Produktregel)  $f'(x) = 1 \cdot e^{bx} + (x+a)e^{bx} \cdot b = (1+bx+ab)e^{bx}$ .

Punkt  $(0, 1)$ , also  $f(0) = 1$ :  $ae^0 = 1$ , also  $a = 1$ .

Steigung bei  $x = 0$  ist 3, also  $f'(0) = 3$ :  $1 + ab = 3$ .

Einsetzen von  $a = 1$  liefert  $b = 2$ . Also  $f(x) = (x + 1)e^{2x}$ .

4. G: Zu minimieren: Leiterlänge  $\overline{AF} = \sqrt{h^2 + x^2}$

N: Dreieck  $ABF$  ähnlich zu Dreieck  $CDF$ , also  $\frac{AB}{BF} = \frac{CD}{DF}$ , d. h.

$$\frac{h}{x} = \frac{8}{x-1}$$

A: Aus N folgt  $h = \frac{8x}{x-1}$ , also  $\overline{AF} = \sqrt{\left(\frac{8x}{x-1}\right)^2 + x^2}$ .

Dieser Ausdruck wird minimal, wenn der Ausdruck unter der Wurzel

$$r(x) = \left(\frac{8x}{x-1}\right)^2 + x^2 = \frac{64x^2}{(x-1)^2} + x^2 = \frac{64x^2 + x^2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^4 - 2x^3 + 65x^2}{(x-1)^2}$$

möglichst klein ist.

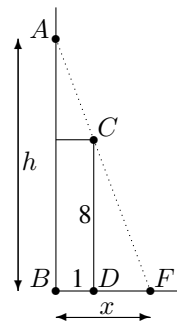
$$D: r'(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot (4x^3 - 6x^2 + 130x) - (x^4 - 2x^3 + 65x^2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x^3 - 3x^2 + 3x - 65)}{(x-1)^3}$$

(( $x - 1$ ) kürzen, Zähler zusammenfassen, 2x ausklammern)

E:  $r'(x) = 0$  liefert  $2x(x^3 - 3x^2 + 3x - 65) = 0$ , also  $x_1 = 0$  oder  $x^3 - 3x^2 + 3x - 65 = 0$ .

Die Nullstelle von letzterem Polynom kann mit  $x_2 = 5$  „geraten“  
 werden; weitere Nullstellen sind nicht vorhanden ( $\rightarrow$  Aufgabe 3).  $\begin{matrix} r' > 0 & | & r' < 0 & | & r' > 0 \\ \text{steigt} & | & \text{fällt} & | & \text{steigt} \end{matrix}$

Also ist  $r$  und damit die Leiterlänge  $\overline{AF}$  minimal für  $x = 5$ .



5. Zu optimierende Größe:  $pq = p(1-p)$  (Damit ist bereits im ersten Schritt auch die Nebenbedingung  $q = 1 - p$  und das Ausdrücken durch nur eine Variable geschehen).

Umbenennung  $x \leftrightarrow p$ :  $f(x) = x(1-x) = x - x^2$ ,  $x \in [0; 1]$ .

Differenzieren:  $f'(x) = 1 - 2x$ .      Extremwerte suchen:  $f'(x) = 0$ ;  $x = \frac{1}{2}$ .

Da es sich bei  $f$  um eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen 0 und 1 handelt, ist bei  $x = \frac{1}{2}$ , also bei  $p = \frac{1}{2}$  das obige Produkt maximal (nämlich  $p(1-p) = \frac{1}{4}$ ).

Wegen des Wertebereichs  $[0; 1]$  gibt es daneben noch Randminima bei  $p = 0$  und  $p = 1$  mit minimalem Wert  $p(1-p) = 0$ .