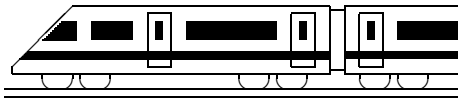
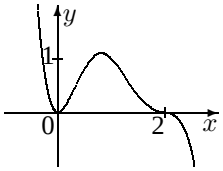


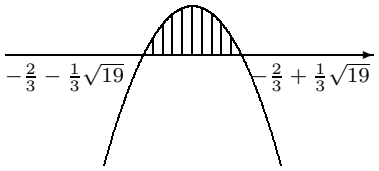
10. Klasse Lösungen | 10
Vorzeichenbereiche | 07

1. $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$. Gezieltes Raten: $x_1 = 1$.
   Polynomdivision: $(x^3 - 3x^2 + 2) : (x - 1) = x^2 - 2x - 2$.
   $x^2 - 2x - 2 = 0$; $x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = 1 \pm \sqrt{3}$.
   Lauter einfache Nullstellen mit Vorzeichenwechsel. Ferner sieht man für große x-Werte $f(x) > 0$. Somit:
   $f < 0 \quad 1 - \sqrt{3} \quad f > 0 \quad 1 \quad f < 0 \quad 1 + \sqrt{3} \quad f > 0$

2. $f(x) = 0$; $x_{1/2/3} = 2$ (3-fache Nullstelle, Vorzeichenwechsel);
   $x_{4/5} = 0$ (doppelte Nullstelle, kein Vorzeichenwechsel).
   Somit (da z. B. $f(3) = -9$): $f > 0 \quad 0 \quad f > 0 \quad 2 \quad f < 0$



3. (a) Löse die zugehörige quadratische Gleichung: $-3x^2 - 4x + 5 = 0$:
   $x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot (-3)} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{-6} = -\frac{2}{3} \mp \frac{1}{3}\sqrt{19}$.
   Nach unten geöffnete Parabel mit Bereich „≥ 0“ (Bild rechts).
   Also ist $L = [-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{19}; -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{19}]$.



   (b) Zuerst alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 3x + 10 \leq 0$.
   Zugehörige quadratische Gleichung: $x^2 - 3x + 10 = 0$.
   $x_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 10}$ ↯, also keine Lösungen, also „schwebende“ nach oben geöffnete Parabel (siehe Bild), bei der die Werte unterhalb (wegen „$<$“) der x-Achse gesucht sind. Da es solche Werte nicht gibt, ist $L = \{\}$.

4. Es muss gelten: Radikand $r(x) = 5x^2 - 40x - 100 \geq 0$.
   Nullstellen von r: $x_{1/2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 5 \cdot (-100)}}{2 \cdot 5} = \frac{40 \pm 60}{10}$; $x_1 = 10$; $x_2 = -2$.
   Da r eine nach oben geöffnete Parabel ist: $r > 0 \quad -2 \quad r < 0 \quad 10 \quad r > 0$
   Somit: $D_f =]-\infty; -2] \cup [10; +\infty[$.

5. Betrachte Zähler: $10x^2 - 70 = 0$; $x_{1/2} = \pm\sqrt{7}$.
   Betrachte Nenner: $\sqrt{7}x^2 + 5x - 2\sqrt{7} = 0$. $x_1 = -\sqrt{7}$; $x_2 = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ (siehe ueb91.pdf).
   Somit: $f(x) = \frac{10x^2 - 70}{\sqrt{7}x^2 + 5x - 2\sqrt{7}} = \frac{10(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})}{\sqrt{7}(x + \sqrt{7})(x - \frac{2\sqrt{7}}{7})} = \frac{10(x - \sqrt{7})}{\sqrt{7}(x - \frac{2\sqrt{7}}{7})}$.
   Durch Einsetzen geeigneter Funktionswerte oder durch Betrachtung der Vorzeichen der Linearfaktoren erhält man:
   $f > 0 \quad -\sqrt{7} \notin D \quad f > 0 \quad \frac{2\sqrt{7}}{7} \notin D \quad f < 0 \quad \sqrt{7} \quad f > 0$

6. Da die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ keine Lösung hat, ist der Nenner stets > 0.
   Zähler: $x^4 + 2x^3 + 3x^2 = x^2(x^2 + 2x + 3)$.
   $x_{1/2} = 0$ oder $x^2 + 2x + 3 = 0$, wobei letztere Gleichung wiederum keine Lösung hat. Stellt man sich den Graphen zum Term $x^2 + 2x + 3$ vor, so handelt es sich also um eine „schwebende“ Parabel ohne Nullstellen, d. h. $x^2 + 2x + 3$ ist stets > 0.
   Somit: $f > 0 \quad 0 \quad f > 0$
   Der Graph von f verläuft somit in ganz $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ oberhalb der x-Achse.