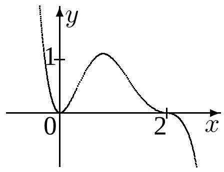
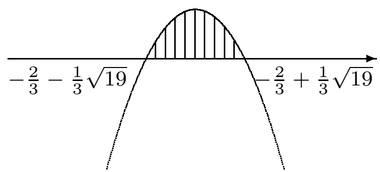
10. Klasse Lösungen	10
Vorzeichenbereiche	**07**

1. $x^3-3x^2+2=0$. Gezieltes Raten: $x_1=1$.
Polynomdivision: $(x^3-3x^2+2):(x-1)=x^2-2x-2$.
$x^2-2x-2=0$; $x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=1\pm\sqrt{3}$.
Lauter einfache Nullstellen mit Vorzeichenwechsel. Ferner sieht man für große x-Werte $f(x)>0$. Somit: $f<0$ | $1-\sqrt{3}$ | $f>0$ | 1 | $f<0$ | $1+\sqrt{3}$ | $f>0$

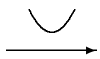
2. $f(x)=0$; $x_{1/2/3}=2$ (3-fache Nullstelle, Vorzeichenwechsel);
$x_{4/5}=0$ (doppelte Nullstelle, kein Vorzeichenwechsel).
Somit (da z. B. $f(3)=-9$): $f>0$ | 0 | $f>0$ | 2 | $f<0$



3. (a) Löse die zugehörige quadratische Gleichung: $-3x^2-4x+5=0$:
$x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot 3\cdot 5}}{2\cdot(-3)}=\frac{4\pm\sqrt{76}}{-6}=-\frac{2}{3}\mp\frac{1}{3}\sqrt{19}$.
Nach unten geöffnete Parabel mit Bereich „≥ 0“ (Bild rechts).
Also ist $L=[-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{19};-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{19}]$.



(b) Zuerst alles auf eine Seite bringen: $x^2-3x+10\leq 0$.
Zugehörige quadratische Gleichung: $x^2-3x+10=0$.
$x_{1/2}=1{,}5\pm\sqrt{2{,}25-10}$ ↯, also keine Lösungen, also „schwebende“ nach oben geöffnete Parabel (siehe Bild), bei der die Werte unterhalb (wegen „<“) der x-Achse gesucht sind. Da es solche Werte nicht gibt, ist $L=\{\}$.



4. Es muss gelten: Radikand $r(x)=5x^2-40x-100\geq 0$.
Nullstellen von r: $x_{1/2}=\frac{40\pm\sqrt{1600-4\cdot 5\cdot(-100)}}{2\cdot 5}=\frac{40\pm 60}{10}$; $x_1=10$; $x_2=-2$.
Da r eine nach oben geöffnete Parabel ist: $r>0$ | -2 | $r<0$ | 10 | $r>0$
Somit: $D_f=]-\infty;-2]\cup[10;+\infty[$.

5. Betrachte Zähler: $10x^2-70=0$; $x_{1/2}=\pm\sqrt{7}$.
Betrachte Nenner: $\sqrt{7}x^2+5x-2\sqrt{7}=0$. $x_1=-\sqrt{7}$; $x_2=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ (siehe ueb91.pdf).
Somit: $f(x)=\frac{10x^2-70}{\sqrt{7}x^2+5x-2\sqrt{7}}=\frac{10(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})}{\sqrt{7}(x+\sqrt{7})(x-\frac{2\sqrt{7}}{7})}=\frac{10(x-\sqrt{7})}{\sqrt{7}(x-\frac{2\sqrt{7}}{7})}$.
Durch Einsetzen geeigneter Funktionswerte oder durch Betrachtung der Vorzeichen der Linearfaktoren erhält man: $f>0$ | $-\sqrt{7}$ ($\notin D$) | $f>0$ | $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ($\notin D$) | $f<0$ | $\sqrt{7}$ | $f>0$

6. Da die Gleichung $x^2+x+1=0$ keine Lösung hat, ist der Nenner stets >0.
Zähler: $x^4+2x^3+3x^2=x^2(x^2+2x+3)$.
$x_{1/2}=0$ oder $x^2+2x+3=0$, wobei letztere Gleichung wiederum keine Lösung hat. Stellt man sich den Graphen zum Term x^2+2x+3 vor, so handelt es sich also um eine „schwebende“ Parabel ohne Nullstellen, d. h. x^2+2x+3 ist stets >0.
Somit: $f>0$ | 0 | $f>0$
Der Graph von f verläuft somit in ganz $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ oberhalb der x-Achse.