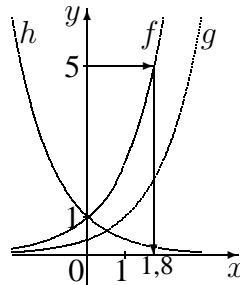




<b>10. Klasse Lösungen</b>	<b>10</b>
<b>Exponential- und Logarithmusfunktion</b>	<b>03</b>

1. $x$	-1	0	1
$f(x)$	0,4	1	2,5
$g(x)$	0,16	0,4	1
$h(x)$	2,5	1	0,4

Graphische Lösung  
von  $2,5^x = 5$  ergibt  
 $x \approx 1,8$ .



$g$  ist gegenüber  $f$  um eine Einheit nach rechts verschoben, bzw. wegen  $g(x) = 2,5^x \cdot 2,5^{-1} = 0,4 \cdot 2,5^x$  mit dem Faktor 0,4 in  $y$ -Richtung gestaucht.

$h$  ist gegenüber  $f$  an der  $y$ -Achse gespiegelt, denn  $h(x) = (\frac{2}{5})^x = (\frac{5}{2})^{-x} = 2,5^{-x} = f(-x)$ .

2. (a)  $f(1996) = 313 = 84a^6$ , also  $a = \sqrt[6]{\frac{313}{84}} = (\frac{313}{84})^{\frac{1}{6}} \approx 1,25$ , d. h. +25 % pro Jahr.  
 $f(1984) = 84a^{-6} \approx 22$  passt;  $f(2002) = 84a^{12} \approx 1200$  passt nicht.  
 Da sich  $a^x$  für  $x \rightarrow -\infty$  nur asymptotisch der 0 nähert, aber stets  $> 0$  ist, lag die Fläche 0 ha zu keinem Zeitpunkt vor.
- (b) Mit  $x = \text{Zeit in Sekunden}$  ist  $f(x) = 20\,000 \cdot (\frac{1}{10})^{\frac{x}{183}}$  [oder Ansatz  $f(x) = 20\,000 \cdot a^x$  liefert  $f(183) = \frac{1}{10} \cdot 20\,000$ , also  $a^{183} = \frac{1}{10}$ ,  $a = \sqrt[183]{0,1} \approx 0,9875$ ].  
 Die Halbwertszeit  $x$  folgt aus  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 20\,000$ , also  $(\frac{1}{10})^{\frac{x}{183}} = 0,5$ . Beidseitiges Logarithmieren liefert  $\log 0,1^{\frac{x}{183}} = \log 0,5$ , also  $\frac{x}{183} \cdot \log 0,1 = \log 0,5$ , also  $x = \frac{\log 0,5}{\log 0,1} \cdot 183 \approx 55$ . Die Halbwertszeit beträgt also ca. 55 s.
- (c) Lineare Abnahme pro Tag um  $\frac{18\,000}{183} \approx 98$  Stück, also  $f(x) = 20\,000 - \frac{18\,000}{183}x$ .
3. (a)  $\dots = \log_3(3^4) = 4 \log_3(3) = 4$                       (b)  $\dots = \log_a(a^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \log_a(a) = \frac{1}{3}$   
 (c)  $\dots = \log_3(3^2) + \log_3(a^3) + \log_3(b) = 2 + 3 \log_3(a) + \log_3(b)$   
 (d)  $\dots = \log_{10}((10 + \frac{1}{a})(10 - \frac{1}{a})) = \log_{10}(10 + \frac{1}{a}) + \log_{10}(10 - \frac{1}{a})$   
 (e)  $\dots = \frac{\log_{10}(0,50)}{\log_{10}(3)} \approx -0,63$                       (Weitere Vereinfachung bei (d) nicht möglich!)
4. (a)  $1,05^x = 10$ ;  $\log 1,05^x = \log 10$ ;  $x \log 1,05 = \log 10$ ;  $x = \frac{\log 10}{\log 1,05} \approx 47,2$   
 (b)  $7 \cdot 6^{5x-4} - 3 = 2$ ;  $6^{5x-4} = \frac{5}{7}$ ;  $\log 6^{5x-4} = \log \frac{5}{7}$ ;  $(5x - 4) \log 6 = \log \frac{5}{7}$ ;  
 $x = (\frac{\log \frac{5}{7}}{\log 6} + 4) : 5 \approx 0,762$   
 (c)  $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-1} = 36$ ;  $2 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{-1} \cdot 2^x = 36$ ;  $(2 + \frac{5}{2})2^x = 36$ ;  $2^x = 8$ ;  $x = 3$   
 (d)  $3^{x+1} = 5 \cdot 4^{x-1}$ ;  $\log 3^{x+1} = \log(5 \cdot 4^{x-1})$ ;  $(x+1) \log 3 = \log 5 + (x-1) \log 4$ ;  
 $(\log 3 - \log 4)x = \log 5 - \log 4 - \log 3$ ;  $x = \frac{\log 5 - \log 4 - \log 3}{\log 3 - \log 4} \approx 3,04$   
 (e) Umformung  $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$  und Substitution  $u = 3^x$  liefern:  
 $u^2 - 12u + 27 = 0$ ;  $u_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 1 \cdot 27}}{2 \cdot 1}$ , also  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 9$ .  
 Rücksubstitution:  $3^x = 3$  oder  $3^x = 9$ , somit  $x = 1$  oder  $x = 2$ .
5. (a) Für den Abstand zwischen 1 und 10 misst man ca. 2,1 cm, also gilt für die gesuchte Basis  $b$ :  $\log_b 10 - \log_b 1 = 2,1$ , also  $\log_b 10 = 2,1$ . Somit  $b^{2,1} = 10$ , also  $b = \frac{\log 10}{\log 2,1} \approx 3$ .  $2,1 \xrightarrow{\log_b \dots} 10$
- (b) Von 1 Euro bis K1 misst man ca. 13,2 cm, also ist  $\log_3 x = 13,2$ . Somit  $x = 3^{13,2} \approx 2 \cdot 10^6$ . (Tatsächlich betrug der Gewinn 1,87 Millionen Euro).  $13,2 \xrightarrow{\log_3 \dots} x$
- (c) Mit  $k_i = \text{Gewinn in Gewinnklasse } i$  ist  $\log_3(k_4) - \log_3(k_5) = \log_3(k_5) - \log_3(k_6)$ , also  $\log_3(\frac{k_4}{k_5}) = \log_3(\frac{k_5}{k_6})$  und somit  $\frac{k_4}{k_5} = \frac{k_5}{k_6}$ , d. h. gleiche Verhältnisse, d. h. die Gewinne vervielfachen sich von Gewinnklasse zu Gewinnklasse jeweils mit dem gleichen Faktor; es ist  $k_6 = 7$ ,  $k_5 = 70$ ,  $k_4 = 700$ ,  $k_3 = 7000$  usw.