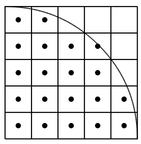
10. Klasse Lösungen — 10
Pi, Kugel, Kreisteile, Bogenmaß — 01

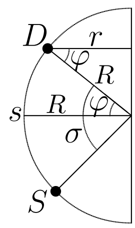
1. 

   Man zählt 20 Punkte innerhalb des Kreises (beim Punkt $(3{,}5|3{,}5)$ kann man sich mit Pythagoras davon überzeugen, dass er innerhalb des Kreises liegt), so dass sich $A \approx 80\ \text{cm}^2$ als Schätzung für den ganzen Kreis ergibt. Gemäß $A = r^2\pi$ ist $\pi = \frac{A}{r^2} \approx \frac{80}{5^2} = 3{,}2$.

2. (a) Halbiert man das Dreieck ABM durch die Höhe h, so sieht man:
   $\cos 54° = \frac{h}{r}$ und $\sin 54° = \frac{\overline{AB}/2}{r}$, also $h = r\cos 54° \approx 11{,}8$, $\overline{AB} = 2r\sin 54° \approx 32,4$.
   $A_{\text{Segment}} = A_{\text{Sektor}} - A_{\text{Dreieck}} = \frac{\varphi}{360°} \cdot r^2\pi - \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h \approx 187$.

   (b) Zeichnet man die Strecke $[M_2S]$ und den Winkel $\varphi = \sphericalangle SM_2M_1$ ein, so lässt sich die überstrichene Fläche A zerlegen in den Viertelkreis mit Mittelpunkt M_1, das Dreieck ΔM_1M_2S und den Sektor M_2TS mit dem Winkel $90° - \varphi$, minus den kleinen Viertelkreis mit Mittelpunkt M_2.
   Im Dreieck M_1M_2S ist $\cos\varphi = \frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_2S}} = \frac{15+20}{45+15+20} = 0{,}4375$, also $\varphi \approx 64{,}06°$.
   Gemäß Pythagoras ist $\overline{M_1S} = \sqrt{\overline{M_2S}^2 - \overline{M_1M_2}^2} \approx 71{,}94$ (alle Maße in cm).
   $A = A_{\text{Viertelkreis 1}} + A_\Delta + A_{\text{Sektor}} - A_{\text{Viertelkreis 2}} =$
   $= \frac{1}{4}\overline{RM_1}^2\pi + \frac{1}{2}\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1S} + \frac{90°-\varphi}{360°}\overline{M_2T}^2\pi - \frac{1}{4}\overline{M_2U}^2\pi \approx 7420$
   Anteil an der ganzen Scheibe: $\frac{A}{125 \cdot 85} \approx 0{,}698 = 69,8\ \%$.

3. Die Formel $r = R\cos\varphi$ ergibt sich aus der Betrachtung des nebenstehenden Querschnitts durch die Erdkugel.

   $s = \frac{123°+10°}{360°} \cdot 2r\pi \approx 9700$ km.
   Für den Winkel σ des Bogens von D zum gesuchten Ort S setzt man an: $s = \frac{\sigma}{360°} \cdot 2R\pi$, also $\sigma = \frac{s}{2R\pi} \cdot 360° \approx 87°$, also liegt der gesuchte Ort $87° - 49° = 38°$ südlich des Äquators.

4. Der Körper ist zusammengesetzt aus einer Halbkugel plus einem Zylinder minus einem herausgeschnittenen Kegel (mit Mantellinie $m_{\text{Keg}} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$).
   $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}r_{\text{Kug}}^3\pi + r_{\text{Zyl}}^2\pi h_{\text{Zyl}} - \frac{1}{3}r_{\text{Keg}}^2\pi h_{\text{Keg}} = \frac{2}{3}(3a)^3\pi + (3a)^2\pi \cdot 4a - \frac{1}{3}(3a)^2\pi \cdot 4a = 42\pi a^3$.
   $O = \frac{1}{2}4\pi r_{\text{Kug}}^2 + 2r_{\text{Zyl}}\pi h_{\text{Zyl}} + \pi r_{\text{Keg}} m_{\text{Keg}} = 2\pi(3a)^2 + 2\pi \cdot 3a \cdot 4a + 3a \cdot 5a\pi = 57\pi a^2$.
   Für $V = 1\ \text{dm}^3$ muss gelten: $42\pi a^3 = 1\ \text{dm}^3$, also $a = \sqrt[3]{\frac{1\ \text{dm}^3}{42\pi}} \approx 0{,}196\ \text{dm} = 1{,}96$ cm.

5. (a) $V = \frac{1}{2}(V_{\text{gr.Kug}} - V_{\text{kl.Kug}}) + V_{\text{gr.Zyl}} - V_{\text{kl.Zyl}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}(40^3 - 38^3)\pi + (10^2 - 8^2)\pi \cdot 80 \approx 28165$

   (b) $M = 2r_1\pi h = 2 \cdot 9 \cdot 80 \cdot \pi = 1440\pi$; $A = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r_2^2 = 2 \cdot 39^2\pi = 3042\pi$.
   $M + A \approx 14081$, also $(M + A)d \approx V$. (Alle Maße in mm bzw. mm^3).

   (c) Bei m-facher Größe werden Volumina m^3-fach und Flächen m^2-fach, bei doppelter Größe also V 8-fach und $M + A$ 4-fach.

6. (a) $\sin 30° = 0{,}5$, $\cos 1° \approx 0{,}99985$ (TR auf DEG)
   $\sin 0{,}08 \approx 0{,}0799$, $\cos 1 \approx 0{,}54$ (TR auf RAD)

   (b) $30° = \frac{30}{360} \cdot 2\pi = \frac{1}{6}\pi$; $1° = \frac{1}{360} \cdot 2\pi \approx 0{,}0175$
   $0{,}08 = \frac{0{,}08}{2\pi} \cdot 360° \approx 4{,}584°$; $1 = \frac{1}{2\pi} \cdot 360° \approx 57{,}3°$
   Man bestätigt nach entsprechendem Umschalten des TRs die obigen Werte.