Grundwissen weitere Themen (alter LP) — W
L'Hospitalsche Regel — 07

Regel von de l'Hospital:
Sind u und v in den jeweiligen Bereichen differenzierbare Funktionen und ist
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
und
$$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x) = 0$$
(liegt also die Situation $\frac{0}{0}$ vor), so ist
$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)},$$
sofern der letztere Grenzwert existiert.
Der Satz gilt auch in der Situation $\frac{\infty}{\infty}$, auch für $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ und auch, wenn der Grenzwert $\lim \frac{u'(x)}{v'(x)} \to \pm\infty$ geht.[1]

Beispiele:

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$
- $$\lim_{x\to 2+0} \frac{x-2}{2x^2-8x+8} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{4x-8} = \frac{1}{+0} \to \infty$$
- Mehrmalige Anwendung des Satzes ist möglich:
  $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$
- Bei Differenzen mit der Situation $\infty - \infty$ kann man versuchen, durch geschicktes Umformen einen Bruch-Ausdruck herzustellen:
  $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} = \ldots = 0$$
- Bei Produkten mit der Situation $\infty \cdot 0$ kann es sinnvoll sein, diese als Bruch zu schreiben (Kehrbruch im Nenner) und so die Situation $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zu erhalten. Beispiel:
  $$\lim_{x\to\infty} x\cdot(1-\cos\tfrac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sin\tfrac{1}{x} = 0$$
- In der 12. Klasse lernen Sie eine Funktion $\ln$ kennen mit $\lim\limits_{x\to 0} \ln x \to -\infty$ und Ableitung $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Hierfür gilt
  $$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-1} = 0$$
  Weitere Grenzwerte mit der $\ln$- und e-Funktion (12. Klasse) sowie Formulierung der L'Hospitalschen Regeln siehe Formelsammlung[2] Seite 55 sowie 59–60.

---

[1] Die Bedingung „sofern der letztere Grenzwert existiert" ist wesentlich, wie das folgende Beispiel (Situation $\frac{\infty}{\infty}$) zeigt: Mit $u(x) = x + \sin x$ und $v(x) = 3x$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{3} + \frac{\sin x}{3x}) = \frac{1}{3}$, der Grenzwert existiert also und ist gleich $\frac{1}{3}$; jedoch existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{3}$ nicht.

[2] Barth, Mühlbauer, Nikol, Wörle, Mathematische Formeln und Definitionen, München, bsv/Lindauer, 1994.