9. Klasse TOP 10 Grundwissen	9
Quadratische Gleichungen	04

Erster Schritt
Quadratische Gleichungen löst man meist, indem man **zuerst alles auf eine Seite bringt**, also die Gleichung auf die folgende Form bringt:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sonderfälle mit „fehlendem“ linearen Glied bx (reinquadr. Gleichung) bzw. fehlender Konstante c (x ausklammern!) sowie biquadr. Gleichungen (Substitution!) → grund910.pdf.

Ist $a = 1$, lautet die Gleichung also $x^2 + bx + c = 0$, spricht man von einer Gleichung in Normalform.

Lösen quadratischer Gleichungen in Normalform $x^2 + px + q = 0$
Entweder: „Mitternachtsformel“ mit $a = 1$ (siehe unten „Lösen allgemeiner quadratischer Gleichungen“). Oder:
„Kleine Formel“ (p, q-Formel):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(Bezeichnet man p als „das Mittlere“ und q als „das Hintere“, so könnte man für die kleine Formel sagen: „Minus das Mittlere halbe plusminus Wurzel aus das gerade Hingeschriebene im Quadrat minus das Hintere“.)
Beispiel:

$$x^2 + 8x - 7 = 0$$

(„Das Mittlere“ ist 8, also das Mittlere halbieren und mit anderem Vorzeichen hinschreiben: -4; plusminus Wurzel schreiben; darunter das Quadrat davon: 16; „das Hintere“ ist -7, also mit anderem Vorzeichen noch unter die Wurzel schreiben: $+7$):

$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16 + 7} = -4 \pm \sqrt{23}$$

Ist der Wert unter der Wurzel 0, so hat man nur eine Lösung (sog. doppelte Lösung).
Ist der Wert unter der Wurzel negativ, so kennzeichnet man dies als verbotenen Ausdruck; die quadratische Gleichung hat dann keine Lösung.

Lösen allgemeiner quadratischer Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$
Falls die Gleichung bequem durch a dividiert werden kann, kann man sie in Normalform bringen und wie oben beschrieben lösen. Andernfalls verwendet man die „Mitternachtsformel“ (sie ist so wichtig, dass man sie auch mitten in der Nacht auswendig wissen muss):

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel: $4x^2 - 14x - 30 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 4 \cdot (-30)}}{2 \cdot 4} = \frac{14 \pm 26}{8}; \quad x_1 = 5; x_2 = -1{,}5$$

Für Wurzeln mit Radikand 0 oder negativem Radikanden, gilt das oben gesagte analog.

Zahl der Lösungen
Ist man nur an der Anzahl der Lösungen interessiert, betrachtet man nur den Ausdruck unter der Wurzel, die sog. **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$. Ist D positiv, so hat die gegebene quadratische Gleichung zwei Lösungen, ist $D = 0$, so gibt es eine doppelte Lösung, und ist D negativ, so gibt es keine Lösung.
Beispiele:
$-5x^2 + 6x - 80 = 0$: $D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-80) < 0$, also keine Lösung.
$5x^2 - 40x + 80 = 0$: $D = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 80 = 0$, also eine doppelte Lösung, nämlich (mit Formel nachrechnen!) $x_{1/2} = 4$