



- Das Wurzelziehen (Radizieren) ist die **Umkehrung des Quadrierens**. Daher ist z. B.

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5 \quad \text{und} \quad \sqrt{5^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5.$$

Da sowohl  $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$  als auch  $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ , muss man bei Variablen, deren Vorzeichen nicht bekannt ist, Betragsstriche setzen:  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

(Der Betrag einer Zahl  $a$  ist die Zahl  $a$  selbst, wenn  $a$  nichtnegativ ist, und ist die Gegenzahl  $-a$ , wenn  $a < 0$  ist, z. B. also  $|3| = 3$ ,  $|-3| = 3$ ).

- Allgemein: Entsprechend ist die  **$n$ -te Wurzel**  $\sqrt[n]{a}$  die nichtnegative Lösung der Gleichung  $x^n = a$ , also z. B.  $\sqrt[3]{1000} = 10$ , denn  $10^3 = 1000$ .

- **Definitionsbereich:**

Unter der Wurzel darf nichts Negatives stehen, d. h. der Radikand muss  $\geq 0$  sein.

Bei  $\sqrt{x}$  muss also  $x \geq 0$  sein,

bei  $\frac{1}{\sqrt{x+5}}$  muss  $x + 5 > 0$  sein (wegen des Nenners hier  $>$  statt  $\geq$ ), d. h.  $x > -5$ .

- **Rechenregeln**

Produkte und Quotienten/Brüche dürfen unter einer Wurzel zusammengefasst werden:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ac}} = \sqrt{\frac{ab}{ac}} = \sqrt{\frac{b}{c}}$$

- **Teilweise radizieren**

Man sucht unter der Wurzel quadratische Faktoren und zieht daraus die Wurzel:

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{ab^2c^7} = \sqrt{ab^2c^6c} = bc^3\sqrt{ac} \quad (\text{für } a, b, c \geq 0, \text{ sonst } |bc^3| \text{ mit Betrag!})$$

$$\sqrt{9x^2 - 36} = \sqrt{9(x^2 - 4)} = 3\sqrt{x^2 - 4} \quad (\text{keine weitere Vereinfachung möglich!})$$

Umgekehrt: Vor der Wurzel stehende Faktoren werden quadratisch in die Wurzel hineingezogen:  $3\sqrt{7} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63}$

- **Rationalmachen des Nenners durch Erweitern:**

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{Erweitern mit } \sqrt{3})$$

- **Schreibweise mit Potenzen:**

$$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \quad (\text{Brüche im Exponenten sagen: „Ich bin eine Wurzel“})$$

$$x^{\frac{3}{2}} = (x^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = x\sqrt{x}$$

$$\text{oder } x^{\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^3 = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} = x\sqrt{x} \quad \text{oder } x^{\frac{3}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$$

Umgekehrt lassen sich Wurzeln oft bequemer als Potenzen weiterverarbeiten, z. B.

$$\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}}{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^0 = 1$$

- **Vorsicht: Bei Summen oder Differenzen die Wurzeln nicht einzeln ziehen:**

Beispiel:  $\sqrt{25 - 16}$  ist nicht gleich  $\sqrt{25} - \sqrt{16}$  (links:  $\sqrt{9} = 3$ , rechts:  $5 - 4 = 1$ ).

Sondern: Ausdrücke wie  $\sqrt{a^2 - b^2}$  oder  $\sqrt{c + d}$  können nicht vereinfacht werden.

- **Vorsicht: Nicht in eine Wurzel hineinkürzen:** Beispiel:  $\frac{\sqrt{12}}{2}$  ist nicht  $\sqrt{6}$ .

Sondern: Teilweise radizieren, falls möglich:  $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ , oder den Nenner quadratisch in die Wurzel hineinziehen:  $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{12} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 12} = \sqrt{3}$ .