

Beispiel:

$$2x - 3y = 7 \quad \text{(I)}$$

$$4x + 5y = -8 \quad \text{(II)}$$

Einsetzverfahren

Löse eine der Gleichungen nach einer Variablen auf und setze in die andere Gleichung ein:

I nach x aufgelöst: $x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}y$ (I')

In II eingesetzt: $4 \cdot (\frac{7}{2} + \frac{3}{2}y) + 5y = -8$

Jetzt hat man eine Gleichung, die nur noch y enthält (x ist eliminiert worden); löse diese Gleichung:

$$\begin{aligned} 14 + 6y + 5y &= -8 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Berechne die andere Unbekannte durch Einsetzen in I':

$$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-2) = \frac{1}{2}$$

Die Lösungsmenge enthält genau ein Zahlenpaar als Lösung:

$$L = \{(\frac{1}{2}; -2)\}$$

Man hat jeweils Wahlmöglichkeiten, welche Variable man eliminiert; wähle geschickt!

Spezialfälle

In Ausnahmefällen kann sich ein Widerspruch von der Sorte $0 = 1$ ergeben (dann ist $L = \{\}$) oder eine allgemeingültige Gleichung der Sorte $0 = 0$ (dann hat man eigentlich nur eine Gleichung mit unendlich vielen Lösungen).

Graphisches Lösungsverfahren

Jede Gleichung wird nach derselben Variablen aufgelöst; die sich dadurch ergebende lineare Funktion wird im Koordinatensystem als Gerade dargestellt; gemeinsame Punkte stellen die gesuchte „simultane“ Lösung dar.

Beispiel: Autofahrt einer Mutter (erfahren mit $1 \frac{\text{km}}{\text{min}}$) mit ihrer Tochter (Führerscheinneuling mit $0,8 \frac{\text{km}}{\text{min}}$). Die Tochter soll gleich lange wie die Mutter fahren. Sie wollen eine Strecke von insgesamt 7 km zurücklegen. Wie lange darf die Tochter/die Mutter am Steuer sitzen?

Sei x die Fahrzeit der Tochter in min, y die der Mutter.

I. $x = y$

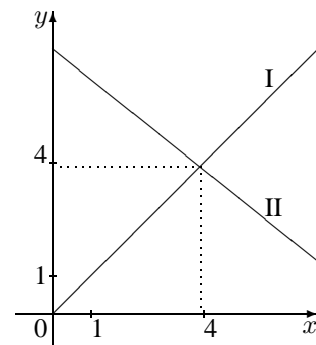
II. $0,8 \cdot x + 1 \cdot y = 7$

Aufgelöst nach y : I. $y = x$

II. $y = 7 - 0,8x$

Der Grafik entnimmt man den Schnittpunkt mit $x \approx 3,9$, $y \approx 3,9$. Tochter und Mutter dürfen je ca. 3,9 min am Steuer sitzen.

Vorteil des graphischen Verfahrens: Man kann weitere Punkte relativ leicht interpretieren; z. B. (5|3) bedeutet, dass zwar 7 km zurückgelegt werden, aber die Tochter würde länger als die Mutter fahren; bei (5|5) würden Mutter und Tochter gleich lange am Steuer sitzen, aber es würden mehr als 7 km zurückgelegt werden.



Additionsverfahren

Schreibe die Gleichungen ordentlich untereinander und multipliziere jede Gleichung so, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen werden; anschließend werden beide Seiten der Gleichungen addiert. Beispiel:

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad 2x - 3y = 7 \quad | \cdot 5 \\ \text{II} \quad 4x + 5y = -8 \quad | \cdot 3 \\ \hline \text{I}' \quad 10x - 15y = 35 \\ \text{II}' \quad 12x + 15y = -24 \\ \hline \text{I}' + \text{II}' \quad 22x = 11 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}$$

Jetzt Gegenzahlen $-15/+15!$
Diesen Zwischenschritt schreibt man in der Regel nicht hin, sondern addiert gleich beide Seiten der Gleichungen im Kopf ($5 \cdot 2x + 3 \cdot 4x = 22x$ usw.).

Die andere Unbekannte y berechnet man durch Einsetzen in I oder II:

$$\begin{aligned} \text{in I:} \quad 2 \cdot \frac{1}{2} - 3y &= 7 \\ y &= -2 \\ L &= \{(\frac{1}{2}; -2)\} \end{aligned}$$