8. Klasse TOP 10 Grundwissen — 8
Lineare Gleichungssysteme — 04

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \qquad \text{(I)} \\ 4x + 5y &= -8 \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Einsetzverfahren

Löse eine der Gleichungen nach einer Variablen auf und setze in die andere Gleichung ein:

I nach x aufgelöst: $x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}y$ (I')

In II eingesetzt: $4 \cdot (\frac{7}{2} + \frac{3}{2}y) + 5y = -8$

Jetzt hat man eine Gleichung, die nur noch y enthält (x ist eliminiert worden); löse diese Gleichung:

$$\begin{aligned} 14 + 6y + 5y &= -8 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Berechne die andere Unbekannte durch Einsetzen in I':

$$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-2) = \frac{1}{2}$$

Die Lösungsmenge enthält genau ein Zahlenpaar als Lösung:

$$L = \{(\tfrac{1}{2}; -2)\}$$

Additionsverfahren

Schreibe die Gleichungen ordentlich untereinander und multipliziere jede Gleichung so, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen werden; anschließend werden beide Seiten der Gleichungen addiert. Beispiel:

$$\begin{array}{lrcl|l} \text{I} & 2x - 3y & = & 7 & \cdot 5 \\ \text{II} & 4x + 5y & = & -8 & \cdot 3 \\ \hline \text{I'} & 10x - 15y & = & 35 & \\ \text{II'} & 12x + 15y & = & -24 & \\ \hline \text{I'+II'} & 22x & = & 11 & \\ & x & = & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Jetzt Gegenzahlen $-15/+15$!
Diesen Zwischenschritt schreibt man in der Regel nicht hin, sondern addiert gleich beide Seiten der Gleichungen im Kopf ($5 \cdot 2x + 3 \cdot 4x = 22x$ usw.).

Die andere Unbekannte y berechnet man durch Einsetzen in I oder II:

$$\begin{aligned} \text{in I:} \quad 2 \cdot \tfrac{1}{2} - 3y &= 7 \\ y &= -2 \\ L &= \{(\tfrac{1}{2}; -2)\} \end{aligned}$$

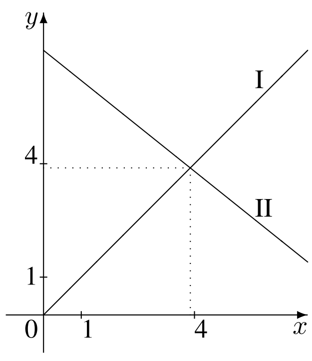
Man hat jeweils Wahlmöglichkeiten, welche Variable man eliminiert; wähle geschickt!

Spezialfälle

In Ausnahmefällen kann sich ein Widerspruch von der Sorte $0 = 1$ ergeben (dann ist $L = \{\}$) oder eine allgemeingültige Gleichung der Sorte $0 = 0$ (dann hat man eigentlich nur eine Gleichung mit unendlich vielen Lösungen).

Graphisches Lösungsverfahren

Jede Gleichung wird nach derselben Variablen aufgelöst; die sich dadurch ergebende lineare Funktion wird im Koordinatensystem als Gerade dargestellt; gemeinsame Punkte stellen die gesuchte „simultane“ Lösung dar.
Beispiel: Autofahrt einer Mutter (erfahren mit 1 $\frac{\text{km}}{\text{min}}$) mit ihrer Tochter (Führerscheinneuling mit 0,8 $\frac{\text{km}}{\text{min}}$). Die Tochter soll gleich lange wie die Mutter fahren. Sie wollen eine Strecke von insgesamt 7 km zurücklegen. Wie lange darf die Tochter/die Mutter am Steuer sitzen?
Sei x die Fahrzeit der Tochter in min, y die der Mutter.
I. $x = y$
II. $0{,}8 \cdot x + 1 \cdot y = 7$
Aufgelöst nach y: I. $y = x$
II. $y = 7 - 0{,}8x$



Der Grafik entnimmt man den Schnittpunkt mit $x \approx 3{,}9$, $y \approx 3{,}9$. Tochter und Mutter dürfen je ca. 3,9 min am Steuer sitzen.
Vorteil des graphischen Verfahrens: Man kann weitere Punkte relativ leicht interpretieren; z. B. $(5|3)$ bedeutet, dass zwar 7 km zurückgelegt werden, aber die Tochter würde länger als die Mutter fahren; bei $(5|5)$ würden Mutter und Tochter gleich lange am Steuer sitzen, aber es würden mehr als 7 km zurückgelegt werden.