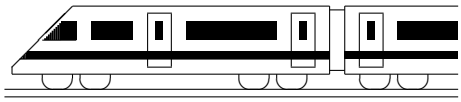


CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund13g.pdf

13. Klasse TOP 10 Mathematik	**13**
Gesamtes Grundwissen mit Übungen	**G**

Grundwissen Mathematik 13. Klasse: Die 10 wichtigsten Themen auf jeweils einer Seite!

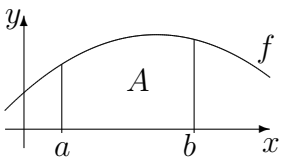
Zum Wiederholen kann man die Übungen des Kompakt-Überblicks verwenden.

13/1	Integration	G	Ü	L
13/2	Integralfunktion, Integralanwendungen	G	Ü	L
13/3	Normalverteilung	G	Ü	L
13/4	Geradengleichungen	G	Ü	L
13/5	Ebenengleichungen, Kugelgleichungen	G	Ü	L
13/6	Koordinatenform und HNF von Ebenen	G	Ü	L
13/7	Lagebeziehung Gerade – Gerade	G	Ü	L
13/8	Lagebeziehung Gerade – Ebene	G	Ü	L
13/9	Lagebeziehung Ebene – Ebene	G	Ü	L
13/10	Steckbriefaufgabe, Optimierung	G	Ü	L
13/K	Kompakt-Überblick zum Grundwissen	G	Ü	L

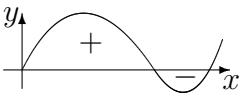
G=Grundwissen, Ü=Übungen, L=Lösungen

CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund131.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen | 13
Integration | 01



$A = \int_a^b f(x)dx$ kann veranschaulicht werden als **Fläche** unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$, genauer: als Flächenbilanz, wobei Flächen oberhalb der x-Achse positiv zählen, unterhalb der x-Achse negativ.



Integralanwendungen, z. B. Flächen zwischen zwei Kurven → grund132.pdf

Näherungsweise können Flächen auch durch Zerlegung in Streifen und die entsprechende Summe der Streifenflächen berechnet werden (→ ueb131.pdf, Aufgabe 1).

Zur Berechnung von $A = \int_a^b f(x)\,dx$:

Zuerst besorgt man sich eine **Stammfunktion** F, d. h. eine Funktion, deren Ableitung $F'(x)$ den Integranden f ergibt (weitere Hinweise → grund122.pdf, grund123.pdf, grund129.pdf und siehe unten; Hauptsatz und Begriff „Integralfunktion“ → grund132.pdf).

Beispiel: $f(x) = x^2 - 10$; dann ist $F(x) = \frac{x^3}{3} - 10x$ (Kontrolle durch Differenzieren!)

Nun wertet man die Stammfunktion aus durch Einsetzen „Obergrenze minus Untergrenze“:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Beispiel (Klammern setzen, Vorzeichen beachten!):
$\int_{-1}^{3} (x^2-10)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 10x\right]_{-1}^{3} = \frac{3^3}{3} - 10\cdot 3 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - 10\cdot(-1)\right] = 9 - 30 + \frac{1}{3} - 10 = -\frac{92}{3}$

Merke Stammfunktionen:

$f(x)$	1	x	x^2	x^n für $n \neq -1$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{N'(x)}{N(x)}$	$v'(x)e^{v(x)}$	$\sin x$
$F(x)$	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\ln\lvert N(x)\rvert$	$e^{v(x)}$	$-\cos x$

Hinweise und Tricks:

- Stammfunktionen sind nur bis auf eine additive Konstante eindeutig (→grund122.pdf), eine Schreibweise ohne Grenzen bedeutet „Menge aller Stammfunktionen“.
- Produkte ausmultiplizieren, z. B. $\int x(x+3)dx = \int(x^2+3x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$.
- Ausdrücke von der Sorte $\frac{1}{x^3}$ oder $\sqrt{x}$ kann man als x^{-3} bzw. $x^{\frac{1}{2}}$ schreiben und mit der x^n-Formel die Stammfunktion $-\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$ bzw. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ finden.
- Bei Brüchen mit einfachem Nenner ist es manchmal günstig, sie „auseinanderzuziehen“, z. B. bei $f(x) = \frac{3x^4+2x^2+x}{x^2} = \frac{3x^4}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} = 3x^2 + 2 + \frac{1}{x}$.
  Also Stammfunktion: $F(x) = x^3 + 2x + \ln|x| + C$.
- In Prüfungsaufgaben steht die Stammfunktion manchmal schon da und man muss durch Differenzieren (→ grund122.pdf, grund127.pdf) lediglich nachweisen, dass es tatsächlich eine Stammfunktion ist, oder es steht in einer Formelsammlung/Dokument mit math. Formeln, z. B. $F(x) = -x + x\ln x$ als Stammfunktion von $f(x) = \ln x$.

  Manchmal hat man in vorhergehenden Aufgaben Umformungen gemacht, die das Integrieren wesentlich erleichtern.

  Beispiel: $f(x) = x - 1 - \frac{3}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)-3}{x-1} = \frac{x^2-4}{x+1}$,
  also ist $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - 3\ln|x+1|$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$.

CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund132.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen | 13
Integralfunktion, Integralanwendungen | 02

Integralfunktion

Bei fester unterer Grenze a und variabler oberer Grenze x erhält man durch $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Integralfunktion.

Beispiel: Eine Integralfunktion zu $f(t) = \frac{1}{4}t + 3$ ist z. B. (bei $a = -4$) gegeben durch

$I(x) = \int_{-4}^{x} (\frac{1}{4}t + 3)dt = \left[\frac{1}{8}t^2 + 3t\right]_{-4}^{x} = \frac{1}{8}x^2 + 3x - (\frac{1}{8} \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4)) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 10.$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion, d. h. $I'(x) = f(x)$.

In obigem Beispiel mit $I(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 10$ ist $I'(x) = \frac{1}{4}x + 3 = f(x)$.

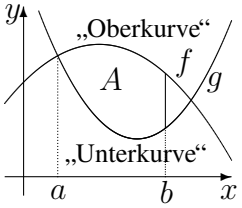
Die Begriffe Integralfunktion und Stammfunktion sind jedoch verschieden: Eine Integralfunktion hat stets mindestens eine Nullstelle (nämlich untere Grenze $x = a$); eine Stammfunktion muss jedoch diese Eigenschaft nicht haben, da diese nur bis auf eine additive Konstante eindeutig ist und somit in y-Richtung verschoben sein kann (→ grund122.pdf).

Zusammenhänge zwischen Eigenschaften einer Stammfunktion F und $f = F'$

Eig. der Stammfkt. F bzw. Integralfunktion	Formaler Zusammenhang (VZW = Vorzeichenwechsel)	Eig. von f an einer Stelle x
F hat Extremum	$F'(x) = f(x) = 0$ mit VZW	f hat Nullstelle mit VZW
F steigt	$F'(x) = f(x) > 0$	f oberhalb der x-Achse
F hat Wendepunkt	$F''(x) = f'(x) = 0$ mit VZW	f hat Extremum

Integralanwendung Fläche zwischen zwei Kurven

„Oberkurve minus Unterkurve“: $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$



Integralanwendung in Sachsituationen

Ist f die Änderungsrate einer Größe, so stellt das Integral die Gesamtänderung dar.

Beispiel: Ist f die Zuflussgeschwindigkeit in einen Wasserspeicher in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$, so ist $\int_a^b f(t)dt$ die im Zeitintervall $[a; b]$ zugeflossene Wassermenge in m^3.

Weitere Interpretation:

Denkt man sich eine Fläche in Streifen mit Fläche „Streifenhöhe $f(x_i)$ mal Streifenbreite Δx“ zerschnitten, so ist $\int_a^b f(t)dt \approx \sum_i f(x_i)\Delta x$ der im Intervall $[a; b]$ vorliegende Gesamtbestand; modelliert z. B. $f(x)$ ähnlich wie in einem Histogramm die Schülerzahl im Alter $x \in [9{,}5; 19{,}5]$, so stellt $\int_{9,5}^{19,5} f(x)dx$ die geamte Schülerzahl aller 10 bis 19-Jährigen dar.

Integralanwendung Rotationskörper

Volumen des Rotationskörpers bei Rotation des Graphen einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ um die x-Achse: $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$.

Uneigentliche Integrale (Anwendung z. B. bei Dichtefunktionen → grund133.pdf)

Für sich ins unendliche erstreckende Funktionen lässt man eine Integrationsgrenze gegen $\pm\infty$ bzw. gegen die Definitionslücke gehen und prüft, ob der Grenzwert existiert.

Beispiele: $\int_0^\infty e^{-0,25x}dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-0,25x}dx = \lim_{z\to\infty} [-4e^{-0,25x}]_0^z = \lim_{z\to\infty} (-4e^{-0,25z} - (-4)) = 4$

$\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{z\to 0} \int_z^{16} x^{-0,25}dx = \lim_{z\to 0} [\frac{4}{3}x^{0,75}]_z^{16} = \lim_{z\to 0} (\frac{4}{3} \cdot 16^{0,75} - \frac{4}{3}z^{0,75}) = \frac{32}{3}$

CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund133.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen 13
Normalverteilung 03

Dichtefunktion f

Es müssen folgende Eigenschaften vorliegen: $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Stetige Zufallsgröße X

Es muss (analog zu Histogrammen → grund124.pdf) gelten:

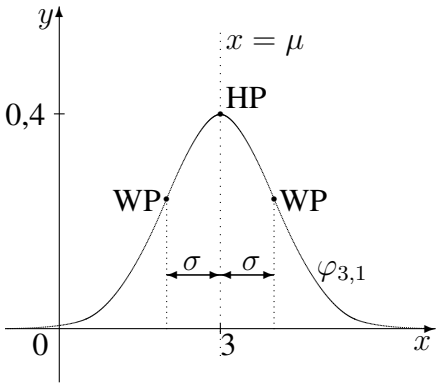
$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ mit einer Dichtefunktion f.

(Dagegen heißt eine Zufallsgröße mit nur einzelnen Werten diskret, z. B. wenn nur ganze Zahlen oder wie bei der Binomialverteilung nur endlich viele Werte sich ergeben können.)

Normalverteilungsdichte: Gaußsche Glockenfunktion

$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Eigenschaften:
Achsensymmetrie zu $x = \mu$
Hochpunkt $(\mu|\frac{1}{2\sigma^2})$
Wendestellen $x_{1/2} = \mu \pm \sigma$



(Fläche unter der Kurve: 1 = 100 %; man beachte, dass in der Abbildung hier die y-Achse anders skaliert ist als die x-Achse)

Für die Standardnormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ist der Hochpunkt ungefähr $(0|0{,}4)$

Normalverteilte Zufallsgröße X

mit Erwartungswert μ und Streuung (Standardabweichung) σ:

$P_{\mu,\sigma}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)dx$.

Kumulative Verteilungsfunktion ist die Integralfunktion

$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt = P(X \leq x)$.

(Bestimmung mit dem Taschenrechner).

Sigma-Regeln

Die Werte des $k \cdot \sigma$-Bereichs symmetrisch um den Erwartungswert stehen in Formelsammlungen/Dokument mit math. Formeln:

$$P_{\mu,\sigma}(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \approx \begin{cases} 0{,}683 & \text{für } k = 1 \\ 0{,}90 & \text{für } k = 1{,}64 \\ 0{,}954 & \text{für } k = 2 \end{cases}$$

Beispiel:

Die Abweichung der tatsächlichen Temperatur von der drei Tage zuvor vorhergesagten Temperatur in Grad Celsius sei normalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 2$.

P(„Es ist um mindestens 1 °C kälter als vorhergesagt“) $= P_{\mu=0,\sigma=2}(X \leq -1) = 0{,}69146$

P(„Die Temperatur weicht um mehr als 4 °C on der Vorhersage ab“)

$= P_{\mu=0,\sigma=2}(X < -4 \text{ oder } X > 4) = 1 - P_{\mu,\sigma}(0 - 2\sigma \leq X \leq 0 + 2\sigma) \approx 1 - 0{,}954 = 0{,}046$

Bei welcher Temperaturabweichung t könnte man sagen, dass sich in 5 % der Fälle eine im Vergleich zur Vorhersage um mehr als t °C wärmere Temperatur ergibt? Ansatz hierfür:

$P_{\mu=0,\sigma=2}(X > t) = 0{,}05$, aus Symmetriegründen also auch $P_{\mu=0,\sigma=2}(X < -t) = 0{,}05$, also Gegenereignis $P_{\mu=0,\sigma=2}(-t \leq X \leq t) = 0{,}90$.

Anwendung der Regel für den $1{,}64\sigma$-Bereich liefert $t = 1{,}64 \cdot \sigma = 3{,}28$.

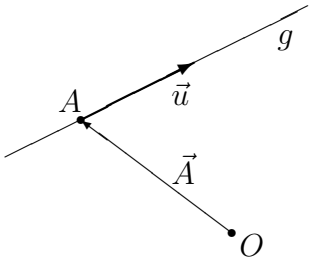
CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund134.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen 13
Geradengleichungen 04

Punkt-Richtungs-Form

Geraden sind gegeben durch einen Aufpunkt A (mit Ortsvektor $\vec{A}$) auf der Geraden und einen Richtungsvektor $\vec{u}$:

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

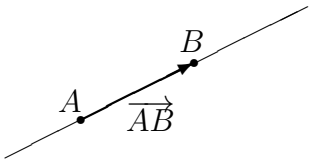


(Interpretation: Die Gerade besteht aus allen Punkten $(x_1|x_2|x_3)$, deren Ortsvektor $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit einer Zahl λ als $\vec{A} + \lambda\vec{u}$ darstellbar ist)

Zwei-Punkte-Form

Gerade durch die Punkte A und B: Dann kann man z. B. A als Aufpunkt und $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ als Richtungsvektor wählen:

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Beispiel:
Gerade g durch $A(2|6|-1)$ und $B(-1|0|2)$:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1- & 2 \\ 0- & 6 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Als Richtungsvektor kann auch ein Vielfaches gewählt werden, also z. B.:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}.$$

Als Aufpunkt kann auch jeder andere Punkt auf der Geraden gewählt werden.

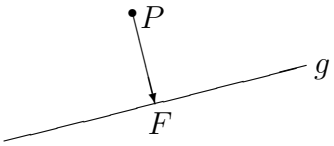
Lagebeziehung Punkt P – Gerade g

Ob P auf g liegt, wird durch Einsetzen des Punktes in die Geradengleichung entschieden.
Beispiel:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- $P(5|12|-4)$ liegt auf g, denn: $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda = 3$
  Probe: passt!
  Probe: passt!
- $Q(1|4|3)$ liegt nicht auf g (siehe ueb134.pdf, Aufgabe 1)

Lotfußpunkt F eines Punktes P auf eine Gerade g; Abstand Punkt P – Gerade g



F als allgemeinen Geradenpunkt aufstellen; $\overrightarrow{PF} \perp \vec{u}$, wobei $\vec{u}$ der Richtungsvektor der Geraden ist.
Der Abstand der Punktes P von der Geraden g ist dann der Abstand von P und F.

Beispiel:

$P(1|-1|4)$, $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Ansatz: Allgemeiner Geradenpunkt $F(7+2\lambda|2+\lambda|-2-5\lambda)$.

$\overrightarrow{PF} \perp \vec{u}$: $\begin{pmatrix} 7+2\lambda-1 \\ 2+\lambda-(-1) \\ -2-5\lambda-4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 0.\ (6+2\lambda)\cdot 2 + (3+\lambda) + (-6-5\lambda)\cdot(-5) = 0.$

$45 + 30\lambda = 0.\ \lambda = -1{,}5$. Einsetzen in Ansatz für F liefert Lotfußpunkt $F(4|0{,}5|5{,}5)$.

Abstand des Punktes P von der Geraden g:

$$d(P,g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9 + 2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{13{,}5} \approx 3{,}67.$$

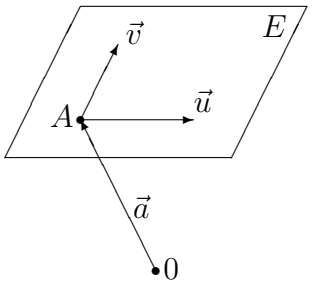
CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund135.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen 13
Ebenengleichungen, Kugelgleichungen 05

Parameterform einer Ebene

Ebenen sind gegeben durch einen Aufpunkt A (mit Ortsvektor $\vec{A}$) auf der Ebene und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$



$\vec{u}$ und $\vec{v}$ müssen linear unabhängig sein (d. h. in verschiedene Richtungen zeigen, dürfen nicht Vielfache voneinander sein).[1]

(Interpretation: Analog zu Geradengleichungen → grund134.pdf)

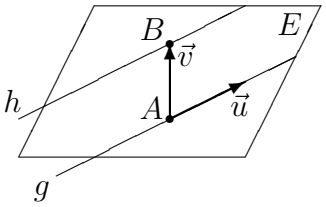
Fälle, in denen die Ebene E durch andere Stücke gegeben ist, führt man (eventuell mittels einer Skizze) auf die obige Punkt-Richtungs-Form zurück:

- E durch 3 Punkte A, B, C gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A}$.
- E durch Gerade $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ und Punkt $P \notin g$ gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\overrightarrow{AP} = \vec{P} - \vec{A}$.
- E durch sich schneidende Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu\vec{v}$ gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.
- E durch echt parallele Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu\vec{v}$ gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$.

Beispiel:

Durch die echt parallelen Geraden

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



ist die Ebene

$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Parameterfreie Form einer Ebene (Koordinatenform, Normalenform)

→ grund136.pdf Koordinatenform

Lagebeziehung Punkt – Ebene

Ob ein Punkt auf einer Ebenen liegt, wird durch Einsetzen des Punktes in die Ebenengleichung entschieden. Dies geht besonders bequem mit der Normalenform.[2]

Kugeln

Eine Kugel ist die Menge aller Punkte X, die vom Mittelpunkt M den gleichen Abstand r haben: $\overline{MX} = r$. Schreibweisen für die Gleichung einer Kugel sind also

$$(\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2.$$

Die Lage einer Geraden oder Ebene zu einer Kugel (z. B. Berührung) kann durch die Bestimmung des Abstands des Kugelmittelpunkts entschieden werden (→ grund134.pdf, grund136.pdf, ueb136.pdf, Aufgabe 4 (d), ueb138.pdf, Aufgabe 6).

[1] Zwei linear abhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, bei denen ein Vektor sich als ein λ-faches des anderen darstellen lässt, heißen auch kollinear. Drei linear abhängige Vektoren liegen in einer Ebene und heißen auch komplanar.

[2] Mit der Parameterform ist dies analog zu Geraden → grund134.pdf möglich; dann muss man nach Einsetzen des Punktes aus zwei Gleichungen λ und μ bestimmen und die Probe in der dritten Gleichung machen.

CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund136.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen | 13
Koordinatenform und HNF von Ebenen | 06

Koordinatenform und Normalenform (parameterfreie Form)
Eine Ebene kann gegeben sind durch einen Aufpunkt A und einen auf der Ebene senkrecht stehenden Normalvektor $\vec{n}$ und ist dann die Menge aller Punkte X mit $\vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = 0$, d. h. $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ (Normalenform), d. h. (nach Ausführung des Skalarprodukts) $n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_x) = 0$ bzw.

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - d = 0 \qquad \text{(Koordinatenform)}.$$

Bestimmung der Koordinatenform aus der Parameterform $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
Der Normalvektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, also $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ ($\rightarrow$ grund120.pdf), wobei man auch ein Vielfaches als Normalvektor verwenden kann. Danach macht man den Ansatz $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und erhält d durch Einsetzen des Aufpunkts A.

Beispiel:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ansatz $11x_1 + x_2 - 5x_3 = d$. $A(1|2|1)$ einsetzen: $d = 11 + 2 - 5 = 8$. Also:
$E : 11x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$.

Interpretation: Die Ebene besteht aus allen Punkten $X(x_1, x_2, x_3)$, für die diese Gleichung gilt. Durch Einsetzen von Punktkoordinaten kann man also prüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Ebene liegt.

Besondere Lage: Ist $d = 0$, so liegt der Ursprung $(0|0|0)$ auf der Ebene.
Ist $n_1 = 0$ (z. B. $F : 2x_2 - x_3 = -2$), so ist die Ebene parallel zur x_1-Achse.

Lotvektor und Lotfußpunkt
Die Koeffizienten in der Normalenform bilden einen Lotvektor zur Ebene.
In den obigen Beispielen sind $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Normalenvektoren (also Vektoren, die auf der Ebene senkrecht stehen).
Um den Lotfußpunkt eines Punktes P auf einer Ebene E zu finden, stellt man die Lotgerade durch P mit Richtungsvektor $\vec{n}$ auf ($\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene E) und bestimmt den Schnittpunkt mit der Ebene ($\rightarrow$ grund138.pdf).

Bestimmung der Hesse'schen Normalform (HNF)
Man bestimmt die Länge des Normalenvektors, dividiert die Ebenengleichung durch diesen Wert und löst die Gleichung nach 0 auf (bringt also die Konstante auf die linke Seite); erhält die Konstante dabei ein positives Vorzeichen, so multipliziert man die Gleichung mit -1.
Beispiel 1: $E : 11x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$. $|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11^2 + 1 + (-5)^2} = \sqrt{147}$. Die HNF lautet somit $\frac{1}{\sqrt{147}}(11x_1 + x_2 - 5x_3 - 8) = 0$.
Beispiel 2: Die HNF der Ebene $F : 2x_2 - x_3 = -2$ lautet $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_2 + x_3 - 2) = 0$.

Abstand Punkt – Ebene
Durch Einsetzen der Punktkoordinaten in der Term der HNF erhält man den Abstand des Punktes von der Ebene, wobei ein negatives Vorzeichen bedeutet, dass der Punkt im gleichen Halbraum wie der Ursprung $O(0|0|0)$ liegt (also auf der gleichen Seite der Ebene).
Beispiel:
Der Abstand des Punktes $P(3|-1|4)$ von der Ebene $E : \frac{1}{\sqrt{147}}(11x_1 + x_2 - 5x_3 - 8) = 0$ ist $d(P, E_1) = \frac{4}{\sqrt{35}}$, und P und O liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene. Der Abstand des Nullpunkts O ist $d(O, E_1) = \frac{8}{\sqrt{147}}$. Der Punkt $Q(4|4|8)$ liegt auf der Ebene E.

CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund137.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen | 13
Lagebeziehung Gerade – Gerade | 07

Richtungsvektoren parallel (d. h. Vielfache voneinander)?			
ja		nein	
Aufpunkt der einen Geraden in die andere einsetzen		Geraden gleichsetzen	
liegt drauf	liegt nicht drauf	eindeutige Lösung	Widerspruch
identisch	echt parallel	schneiden sich	windschief

Beispiele:

$$g_1\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} \qquad g_2\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \qquad g_3\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}0{,}8\\-0{,}8\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-0{,}4\\-0{,}6\\-1\end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Lagebeziehung von g_1 und g_2:
Die Richtungsvektoren sind nicht parallel. Falls nicht schon geschehen, müssen vor dem Gleichsetzen die Parameter verschiedene Bezeichnungen erhalten.

I $\quad 1 + \lambda_1 = 4 + 2\lambda_2 \qquad | \cdot (-4)$
II $\quad 2 + 4\lambda_1 = 4 + 3\lambda_2 \qquad |$
III $\quad 1 + 3\lambda_1 = 8 + 5\lambda_2$

Aus zwei Gleichungen (z. B. I und II) λ_1 und λ_2 berechnen:

$$-2 = -12 - 5\lambda_2; \quad \lambda_2 = -2$$

in I: $\lambda_1 = -1$
Probe mit der dritten (noch nicht verwendeten) Gleichung: $-2 = -2$ (stimmt).
Die Geraden schneiden sich.
Schnittpunkt: λ_1 in g_1 einsetzen (oder λ_2 in g_2): $S(0|-2|-2)$.

Lagebeziehung von g_2 und g_3:
Die Richtungsvektoren sind parallel, denn $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} = -0{,}2 \begin{pmatrix}-0{,}4\\-0{,}6\\-1\end{pmatrix}$.
Aufpunkt von g_3 $(0{,}8|-0{,}8|0)$ in g_2 einsetzen:

$$\begin{pmatrix}0{,}8\\-0{,}8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \text{ also}$$

$0{,}8 = 4 + 2\lambda_2$, also $\lambda_2 = -1{,}6$
$-0{,}8 = 4 + 3\lambda_2$, Probe stimmt
$0 = 8 + 5\lambda_2$, Probe stimmt.

Also sind g_2 und g_3 identische Geraden.

Schnittwinkel sich schneidender Geraden
Wenn sich zwei Geraden schneiden, so berechnet sich der Schnittwinkel aus den Richtungsvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ mit

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

Beispiel:
Für obige Geraden g_1, g_2 ist $\cos\varphi = \frac{1\cdot 2+4\cdot 3+3\cdot 5}{\sqrt{1+16+9}\cdot\sqrt{4+9+25}} \approx 0{,}9226$, also $\varphi \approx 22{,}69°$.

Geraden schneiden sich senkrecht, wenn sie sich schneiden und die Richtungsvektoren aufeinander senkrecht stehen (also deren Skalarprodukt $\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2 = 0$ ist).

Abstand paralleler Geraden
= Abstand des Aufpunkts der einen Geraden von der anderen Geraden (→ grund134.pdf)

Abstand windschiefer Geraden
Ebenengleichung für die Ebene aufstellen, die g_1 enthält und zu g_2 parallel ist (also mit g_1 und Richtungsvektor $\vec{u}_2$), HNF aufstellen und Abstand des Aufpunkts der Geraden g_2 von dieser Ebene bestimmen.

CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund138.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen | 13
Lagebeziehung Gerade – Ebene | 08

Allgemeinen Geradenpunkt einsetzen in die Normalenform der Ebene		
Eindeutige Lösung	Typ $0 = 1$	Typ $0 = 0$
schneiden sich	echt parallel	Gerade liegt in der Ebene

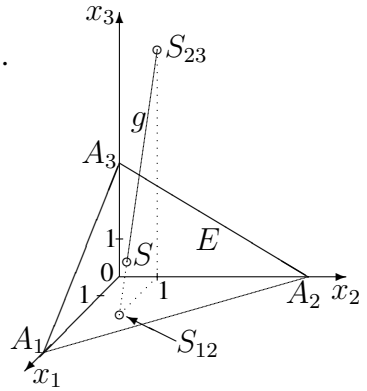
Beispiel:
$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad E : 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 = 60$$
Allgemeiner Geradenpunkt $G(2 + \lambda|1| - 3\lambda)$ in E: $15(2 + \lambda) + 12 \cdot 1 + 20 \cdot (-3\lambda) = 60$; $\lambda = -0{,}4$; g und E schneiden sich.
Schnittpunkt: λ in G einsetzen: $S(1{,}6|1|1{,}2)$.

Schnittwinkel von Gerade und Ebene
Falls sich Gerade und Ebene schneiden, so berechnet man den Schnittwinkel aus dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden und dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene mit
$$\sin\psi = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$
Beispiel: Für die obigen g, E ergibt sich $\sin\psi = \frac{|1 \cdot 15 + 0 \cdot 12 + (-3) \cdot 20|}{\sqrt{1+0+9} \cdot \sqrt{225+144+400}} \approx 0{,}51316$, also $\psi \approx 30{,}87°$.

Besondere Lage
- Gerade und Ebene schneiden sich senkrecht, wenn der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene parallel (also Vielfache voneinander) sind.
- Ist $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$, so sind Gerade und Ebene parallel (echt parallel oder zusammenfallend, kann entschieden werden durch Einsetzen des Aufpunkts der Geraden in die Ebene).

Abstand einer parallelen Gerade von einer Ebene
HNF der Ebene aufstellen; Abstand des Aufpunkts der Gerade von der Ebene bestimmen.

Achsenpunkte einer Ebene, Spurgeraden
Für Zeichnungen können die Achsenpunkte (Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen) und Spurgerade (Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen) nützlich sein.
Achsenpunkt mit der x_1-Achse: Punkte auf der x_1-Achse sind von der Bauart $A_1(x_1|0|0)$, Einsetzen in die Normalenform liefert x_1.
Für obige Ebene E ergibt sich: $A_1(4|0|0)$, $A_2(0|5|0)$, $A_3(0|0|3)$.
Spurgeraden können meist ($\rightarrow$ ueb138.pdf) berechnet werden als Verbindungsgeraden der Achsenpunkte.
Für obige Ebene E ergibt sich z. B. als Spurgerade mit der x_1x_2-Ebene: $A_1A_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.



Spurpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen
ergeben sich als Schnittpunkte mit den Ebenen $x_3 = 0$ (x_1x_2-Ebene) usw. durch Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts.
Für obige Gerade g ergibt sich:
Mit x_1x_2-Ebene: G in $x_3 = 0$: $-3\lambda = 0$, $\lambda = 0$, also $S_{12}(2|1|0)$.
Mit x_1x_3-Ebene: G in $x_2 = 0$: $1 = 0$, kein Schnitt mit der x_1x_3-Ebene, g ist parallel dazu.
Mit x_2x_3-Ebene: G in $x_1 = 0$: $2 + \lambda = 0$, $\lambda = -2$, also $S_{23}(0|1|6)$.

Lot fällen (d. h. Punkt P auf Ebene E projizieren), P an E spiegeln $\rightarrow$ ueb138.pdf.

Lotfußpunkt eines Punktes P auf eine Gerade g $\rightarrow$ ueb138.pdf.

CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund139.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen | 13
Lagebeziehung Ebene – Ebene | 09

Betrachte Ebenengleichungen in Normalenform		
Gleichungen identisch (d. h. bis auf einen Faktor)	Normalenvektor parallel, aber Gleichungen nicht identisch	Normalenvektor nicht parallel
identisch	echt parallel	schneiden sich

Beispiele:

1. $E: 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$ und $F_1: -4x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 34 = 0$ sind identisch.
2. $E: 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$ und $F_2: -4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = -12$ sind echt parallel.
3. $E: 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$ und $F_3: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4$ schneiden sich.
   Zur Bestimmung der Schnittgerade eliminiert man (wenn nicht schon eine solche Gleichung vorliegt) eine Variable:

$$\begin{array}{lll} E: & 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17 & \mid \cdot 2 \\ F_3: & x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4 & \mid \\ \hline (*) & 5x_1 \qquad - 8x_3 = 30 & \end{array}$$

   Da es sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem handelt (2 Gleichungen für 3 Variable), bedeutet die fehlende dritte Gleichung, dass man meist (→ ueb139.pdf, Aufgabe 3e) eine Variable frei wählen kann, d. h. man hat nun einen „Wunsch“ frei in Form eines Parameters, z. B.

$$\begin{array}{rcl} & x_3 = \lambda & \\ \text{in } (*): & x_1 = 6 + \frac{8}{5}\lambda & \\ \text{in } E: & x_2 = 17 - 2x_1 + 5x_3 = 17 - 2(6 + \frac{8}{5}\lambda) + 5\lambda = 5 + \frac{9}{5}\lambda & \end{array}$$

   Die Schnittgerade lautet damit:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder etwas schöner} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel sich schneidender Ebenen

Falls sich die Ebenen schneiden, so berechnet man den Schnittwinkel aus den Normalenvektoren $\vec{n}$ und $\vec{n}'$ mit

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n} \circ \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$$

Beispiel:
Für die Ebenen E und F_3 aus obigem Beispiel 3 ist $\cos\varphi = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + (-5)\cdot 2|}{\sqrt{4+1+25}\cdot\sqrt{1+4+4}} \approx 0{,}6086$, also $\varphi \approx 52{,}51°$.

Ebenen schneiden sich senkrecht, wenn die Normalenvektoren aufeinander senkrecht stehen (also deren Skalarprodukt $\vec{n} \circ \vec{n}' = 0$ ist).

Abstand paralleler Ebenen

HNF einer Ebene bestimmen; beliebigen Punkt auf der anderen Ebene wählen (z. B. zwei Koordinaten beliebig, dritte aus der Ebenengleichung berechnen) und dessen Abstand von der anderen Ebene ermitteln.

Beispiel (mit den Ebenen E und F_2 aus obigem Beispiel 2):
Bestimmung der HNF von E: $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$. Also HNF von E: $\frac{1}{\sqrt{30}}(2x_1 + x_2 - 5x_3 - 17) = 0$.
Beliebiger Punkt auf F_2, z. B. mit $(?|0|0)$: $(3|0|0)$. Einsetzen in den Term der HNF liefert den Abstand $d(E, F_2) = |\frac{1}{\sqrt{30}}(6 - 17)| = \frac{11}{\sqrt{30}}$.

CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund130.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen | 13
Steckbriefaufgabe, Optimierung | 10

Steckbriefaufgabe (d. h. gesucht ist eine Funktion mit vorgegebenen Eigenschaften)
Steckbrief-Beispiel: Gesucht ist eine zur y-Achse achsensymmetrische Polynomfunktion 4. Grades mit Min$(2|1)$ und Schnitt der y-Achse bei $y = 2$.
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, wegen der geforderten Achsensymmetrie werden nur gerade Exponenten gewählt, also $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$.

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$$

Die gegebenen Informationen werden jetzt „abgearbeitet“ und mit Hilfe des Ansatzes umgesetzt; für drei unbekannte Parameter werden drei Gleichungen benötigt.
Min$(2|1)$ bringt zwei Informationen: Steigung bei $x = 2$ ist 0: $f'(2) = 0$: $4a \cdot 8 + 2c \cdot 2 = 0$
Punkt $(2|1)$: $f(2) = 1$: $16a + 4c + e = 1$
Ferner: Punkt $(0|2)$: $f(0) = 2$: $e = 2$
Lösen dieses Gleichungssystems: $e = 2$ eingesetzt:

$$\begin{array}{ll} 32a + 4c = 0 & |\cdot 1 \\ \underline{16a + 4c = -1} & |\cdot(-1) \end{array}$$

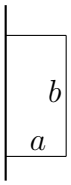
$16a = 1$, also $a = \frac{1}{16}$, somit (aus $32a+4c = 0$): $c = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Also: $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2$
Nachrechnen zeigt, dass bei $x = 1$ tatsächlich ein Min vorliegt:
$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - x = x(\frac{1}{4}x^2 - 1) = 0$ liefert $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm 1$.

	$f' < 0$		$f' > 0$
-1		0	1
	fällt		steigt

Spezialfall: Geradengleichungen aufstellen
Fall 1: Gegeben sind Steigung m und Punkt $P(x_1|y_1)$:
Ansatz $y = mx + t$ mit gegebenem m. Einsetzen der Punktkoordinaten für x und y liefert t.
Fall 2: Gegeben sind zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$:
Steigungsdreieck: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Weiter mit m und P wie in Fall 1.

Anwendung: Modellieren mit Funktionen
Gelegentlich kommt je nach Fragestellung anstelle einer Polynomfunktion auch ein Ansatz mit einem anderen Funktionstyp (z. B. Exponentialfunktion, Bruchfunktion, trigonometrische Funktion) in Frage, wobei wieder ein Ansatz mit Parametern aufgestellt wird und diese mit gegebenen Funktionseigenschaften bestimmt werden.

Optimierungsaufgabe (Extremwertaufgabe)

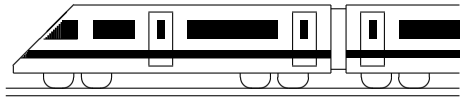


Beispiel: Mit einer 50 m^2-Grassamen-Packung soll entlang einer Mauer eine rechteckige Fläche angelegt werden, die möglichst wenig Zaun zur Eingrenzung benötigt. Hier im Folgenden: Rechnung in der Einheit m.

Rezept: „GNADE“:
Größe, die extremal werden soll, mit Berechnungsformel: Zaunlänge $l = 2a + b$
Nebenbedingung: Fläche $a \cdot b = 50$ (Braucht man, wenn mehrere Unbekannte [hier: a, b] vorliegen, um eine Unbekannte durch die andere auszudrücken)
Ausdrücken der zu optimierenden Größe durch Funktion einer Variablen:
N liefert $b = \frac{50}{a}$, Einsetzen in G liefert $l = 2a + \frac{50}{a}$
Umbenennung $a \leftrightarrow x$ liefert Funktion: $f(x) = 2x + \frac{50}{x}$
Differenzieren: $f'(x) = 2 - 50x^{-2} = 2 - \frac{50}{x^2}$
Extremwerte suchen und Ergebnis schreiben: $f'(x) = 0$ liefert $x^2 = 25$, $x = \pm 5$

	$f' < 0$		$f' > 0$
-5		5	
nicht sinnvoll	fällt	Min	steigt

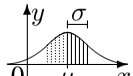
Ergebnis: Die kleinste Zaunlänge ergibt sich für $a = 5$, $b = \frac{50}{5} = 10$ (aus N), und sie beträgt $l = 2a + b = 20$.

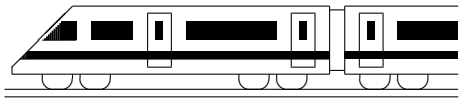


13. Klasse TOP 10 Grundwissen | 13
Kernsätze | K

CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund13k.pdf

Blatt auf DIN A 3 vergrößern, Karteikarten ausschneiden und Rückseite an Rückseite zusammenkleben!

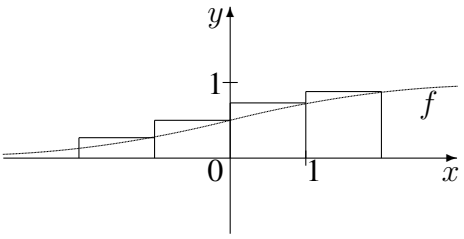
Integration	**Integralfunktion, -anwendung**	**Normalverteilung**	**Geradengleichungen**	**Ebenengleichungen, Kugeln**
131 Wie berechnet man Integrale, z. B. $\int_{-1}^{2}(4x-7)dx$, $\int e^{-4x}dx$? Unterscheide Integralwert und Fläche!	132 Wie berechnet man die Fläche A zwischen zwei Kurven, wie das Volumen von Rotationskörpern? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?	133 Welche Eigenschaften hat die Normalverteilungsdichte?  Wo findet man Werte zu symmetrisch zum Mittelwert gelegene Flächen? $A = P_{\mu=1,\sigma=0{,}5}(1 < X < 1{,}5) = ?$	134 Wie sind im Raum Geraden g gegeben? Wie die Gerade durch zwei Punkte A, B? Wie prüft man, ob P auf g liegt? Wie berechnet man den Abstand eines Punktes von einer Geraden?	135 Wie sind Ebenen in Parameterform gegeben? Wie stellt man eine Ebene durch drei Punkte A, B, C auf? Wie lautet die Kugelgleichung für $k(M;r)$?
L131 Stammfkt. F (also mit $F' = f$) auswerten „Ober- minus Untergrenze“, z. B. $\int_{-1}^{2}(4x-7)dx = [2x^2-7x]_{-1}^{2} = -6-8 = -14$, $\int e^{-4x} = -\frac{1}{4}e^{-4x} + C$ Integral: Flächenbilanz ober-/unterhalb der x-Achse liegender Flächen	L132 A: „Ober- minus Unterkurve“. $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ HdI: Die Ableitung der Integralfunktion $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ ergibt den Integranden: $I' = f$.	L133 Fläche 1 unter der Kurve, Hochpunkt $(\mu \mid \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$, WP bei $x = \mu \pm \sigma$. Sigma-Regeln, z. B. $P(\lvert x-\mu\rvert \le \sigma) \approx 0{,}683$ $A = \frac{0{,}683}{2} \approx 0{,}34$	L134 $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ mit Aufpunkt A und Richtungsvektor $\vec{u}$, $AB: \vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B}-\vec{A})$. P einsetzen, drei Gleichungen für gleiches λ. Fußpunkt als allg. Geradenpunkt ansetzen, $\overrightarrow{PF} \circ \vec{u} = 0$.	L135 Aufpunkt A und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}, \vec{v}$: $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Drei-Punkte-Gleichung: $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B}-\vec{A}) + \mu(\vec{C}-\vec{A})$. Kugel: $(x_1-m_1)^2 + \ldots = r^2$
Ebenen-Koord.form und HNF	**Lagebeziehung Gerade – Gerade**	**Lagebeziehung Gerade – Ebene**	**Lagebeziehung Ebene – Ebene**	**Steckbriefaufgabe, Optimierung**
136 Wie berechnet man aus $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda u + \mu\vec{v}$ die Koord.form $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$? Wie fällt man ein Lot von P auf E? Wie bestimmt man Hesse-Normalform und Abstand $d(P,E)$?	137 Wie bestimmt man die gegenseitige Lage zweier Geraden? Wie gegebenenfalls den Schnittwinkel φ?	138 Wie bestimmt man die gegenseitige Lage Gerade g – Ebene E? Wie ggf. den Schnittwinkel ψ? Von welcher „Bauart“ sind Achsenpunkte z. B. auf der x_3-Achse? Welche Gl. hat die x_2x_3-Ebene?	139 Wie erkennt man die gegenseitige Lage zweier Ebenen? Wie bestimmt man gegebenenfalls die Schnittgerade s und den Schnittwinkel φ?	130 Welcher Ansatz wird bei einer Funktion dritten Grades gemacht? Welche Gl. folgen z. B. aus „Nst $x = 1$ Steigung $45°$, Min$(0\lvert -2)$“? Wie kann man bei Extremwertaufgaben vorgehen?
L136 Normalvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, Ansatz $n_1x_1 + \ldots = d$, A einsetzen $\to d$. Lotgerade (Aufpunkt P, Richtungsvektor $\vec{n}$) mit E schneiden. HNF: Ebenengl. durch $\pm\lvert\vec{n}\rvert$ teilen, $d(P,E)$: Punkt in Term der HNF einsetzen.	L137 Richtungsvektoren parallel? • Falls ja: Aufpunkt der einen Geraden in die andere einsetzen $\to$ identisch oder echt parallel. • Falls nein: Gleichsetzen $\to$ Schnittpunkt oder windschief. $\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{u}\circ\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}$.	L138 Allg. Geradenpunkt in E einsetzen $\to$ schneiden sich („$\lambda = \ldots$“) bzw. Gerade in der Ebene („$0 = 0$“) bzw. echt parallel („$1 = 0$“). $\sin\psi = \frac{\lvert\vec{u}\circ\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$. $A_3(0\lvert 0\lvert x_3)$. x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$.	L139 Normalvektoren parallel? $\to$ Ebenen identisch oder echt parallel oder sich schneidend. s: Unterbest. Gl.system lösen (eine Variable „freier Wunsch“ λ, andere durch λ ausdrücken). $\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1\circ\vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\cdot\lvert\vec{n}_2\rvert}$.	L130 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f(1) = 0$, $f'(1) = \tan 45° = 1$, $f(0) = -2$, $f'(0) = 0$. Extremwertaufg.: Zu optimierende Größe notieren, mit Nebenbedingungen alles durch eine Variable ausdrücken, Extrema suchen.



CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb131.pdf

13. Klasse Übungsaufgaben | 13
Integration | 01

1. Gegeben ist $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ mit dem nebenstehenden Graphen.



   (a) Berechnen Sie für $A = \int_{-2}^{2} f(x)dx$ eine Abschätzung nach oben, indem Sie wie in der Abbildung die Streifenflächen berechnen und summieren.

   (b) Berechnen Sie den exakten Wert von A (beachten Sie: Der Zähler ist Ableitung des Nenners, also $f(x)$ von der Bauart $\frac{N'(x)}{N(x)}$).
   Um wie viel % weicht die Abschätzung aus Teilaufgabe (a) hiervon ab?

   (c) Die Verkaufszahlen eines bestimmten Autotyps (in 100 000 Stück) im Jahre x (Markteinführung vor zwei Jahren: $x = -2$) werden modellhaft durch die Funktion f beschrieben.
   Welche Bedeutung haben dann $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ in diesem Kontext?

2. Zu betrachten sind $f(x) = \sin x$, $D_f = [0;\pi]$, und $h(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x)$, $D_h = [0;2\pi]$.

   Berechnen Sie $\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ und $\int_{0}^{2\pi} h(x)dx$.

   Begründen Sie einen Vergleich der Ergebnisse, indem Sie beschreiben, wie der Graph von h aus dem Graphen von f erzeugt werden kann.

3. Berechnen Sie:

   (a) $\int_{-2}^{-1} \dfrac{x^3 - x - 5}{x^2}dx$ (b) $\int_{0}^{4} (6\sqrt[3]{x} - 5)dx$ (c) $\int_{0}^{1} x \cdot e^{x^2}dx$

4. Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 0{,}5$.

   (a) Skizzieren Sie den Graphen und markieren Sie die Flächenstücke, die zum Integral $\int_{0}^{5} f(x)dx$ beitragen.

   (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der in Teilaufgabe (a) markierten Fläche.

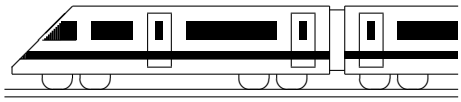
   (c) Berechnen Sie den Wert des Integrals.

   (d) Anstelle von f soll nun die verschobene Funktion mit $h_a(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - a$ mit Parameter $a > 0$ im Intervall $[0;3]$ betrachtet werden. Dort liegt die Nullstelle $x_1 = \sqrt{2a} + 3$.

   Bestimmen Sie die Lösung a der Gleichung A $\int_{0}^{3} h_a(x)dx = 0$.

   Die Integrationsregel $\int_{0}^{\sqrt{2a}+3} h_a(x)dx + \int_{\sqrt{2a}+3}^{3} h_a(x)dx = \int_{0}^{3} h_a(x)dx$ ergibt im Fall von A die Gleichung B $\int_{0}^{\sqrt{2a}+3} h_a(x)dx = -\int_{\sqrt{2a}+3}^{3} h_a(x)dx$.

   Interpretieren Sie A und B.



CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb132.pdf

13. Klasse Übungsaufgaben	**13**
Integralfunktion, Integralanwendungen	**02**

Weiteres Anwendungsbeispiel → ueb131.pdf, Aufgabe 1 (c), zum graphischen Zeichnen von Stammfunktionen → ueb122.pdf, Aufgabe 6, zum uneigentlichen Integral → ueb132.pdf, Aufgabe 1.

1. Zu betrachten ist die Integralfunktion $I(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t \, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

   Berechnen Sie den Term von $I(x)$.

   Zeigen Sie: $I(0) < 0$ (obwohl $\cos t \geq 0$ für $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$). Formulieren Sie eine Begründung für diese Beobachtung.

2. Zeigen Sie: $I(x) = x \cdot \ln \frac{x+3}{2x} + 3\ln(x+3) - 7\ln 2$ ist der Term der Integralfunktion $I(x) = \int\limits_{1}^{x} \ln \frac{t+3}{2t} dt$.

   Der Integrand $f(t) = \ln \frac{t+3}{2t}$ hat die Nullstelle $x = 3$. Was folgt daraus für den Graphen von I?

3. Skizzieren Sie die Graphen zu den Funktionen mit $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)x^2$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x^2-4)$ und berechnen Sie

   (a) den Inhalt A_1 der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird;

   (b) den Inhalt A_2 der Fläche zwischen den Graphen von f und g;

   (c) $A_3 = \int\limits_{1}^{2{,}5} f(x)dx$ und deuten Sie das Vorzeichen hiervon;

   (d) den Inhalt A_4 der Fläche, die von der Tangente an g im Punkt $(-3|2{,}5)$, der x-Achse und dem Graphen von g eingeschlossen wird;

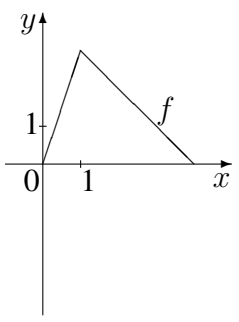
   (e) b so, dass $\int\limits_{0}^{b} g(x)dx = 0$ und deuten Sie die Ergebnisse.

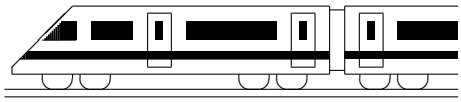
4. $v(t)$ beschreibe die Geschwindigkeit einer Lokomotive zur Zeit t.

   Beschreiben Sie die Bedeutung von $A = \int\limits_{-2}^{0} v(t)dt$.

   Erklären Sie den Verlauf der Integralfunktion mit $I(x) = \int\limits_{-2}^{x} v(t)dt$ an der Stelle x, wenn dort $v(x) < 0$ gilt.

5. Durch Rotation von $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ -x+4 & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ um die x-Achse entsteht ein Doppelkegel.
   Berechnen Sie das Volumen des Doppelkegels.



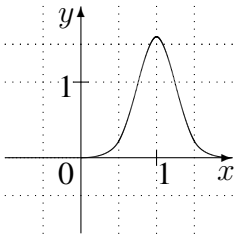


CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb133.pdf

13. Klasse Übungsaufgaben | 13
Normalverteilung | 03

1. Begründen Sie, dass durch $f(x) = \begin{cases} 2(x+1)^{-3} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
   eine Dichtefunktion gegeben ist, dass also $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

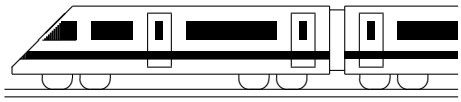
2. Entnehmen Sie der nebenstehenden Abbildung des Graphen einer Normalverteilungs-Dichte $\varphi_{\mu,\sigma}$ entsprechende Daten und ermitteln Sie daraus die Parameter μ und σ.
   Geben Sie mit Begründung den Wert der Steigung der zugehörigen kumulativen Verteilungsfunktion an der Stelle $x = \mu$ und den y-Wert an der Stelle $\mu + \sigma$ an.



3. Bei der Herstellung von Nägeln mit einer Soll-Länge von 60 mm seien die von der Maschine ausgegebenen Nagel-Längen X normalverteilt mit Mittelwert 60 mm und Streuung 0,46 mm. Berechnen Sie:
   (a) Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
   A: „Ein von der Maschine ausgegebener Nagel hat eine Länge von mehr als 60,5 mm“.
   B: „in von der Maschine ausgegebener Nagel weicht von der Soll-Länge um weniger als 0,1 mm ab“.
   C: „Ein von der Maschine ausgegebener Nagel hat eine Länge von genau 60 mm.
   (b) Finden Sie durch gezieltes Probieren auf 0,1 mm genau diejenige Nagellänge ℓ, für die $P(X \leq \ell) \approx 6{,}4\ \%$.
   Beschreiben Sie Ihre Argumentation einer gezielten Vorgehensweise.
   (c) Ein Nagel, der um mehr als 1 mm vom Soll-Wert abweicht, wird bei der Qualitätskontrolle beanstandet.
   Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, dass in einer Schachtel mit 200 unabhängig ausgegebenen Nägeln mindestens 6 beanstandet werden.
   (d) Berechnen Sie, wie die Abweichung vom Soll-Wert festgesetzt werden muss, damit 95 % der Nägel innerhalb des Toleranz-Bereichs liegen.

4. Zu betrachten ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsgröße Werte im Intervall $[2; 6]$ annimmt.
   (a) Ermitteln Sie $P_{\mu=5,\sigma=2}(2 \leq X \leq 6)$.

   Geben Sie mit begründeter Vorgehensweise zunächst ohne Probieren an:
   (b) einen anderen Wert von μ, sodass bei gleichem $\sigma = 2$ die Wahrscheinlichkeit (W.) kleiner wird,
   (c) einen anderen Wert von μ, sodass bei gleichem $\sigma = 2$ die W. größer wird,
   (d) einen anderen Wert von σ, sodass bei gleichem $\mu = 5$ die W. kleiner wird,
   (e) einen anderen Wert von σ, sodass bei gleichem $\mu = 5$ die W. größer wird.
   (f) Prüfen Sie mit dem Taschenrechner die Korrektheit Ihrer Angaben aus Teilaufgabe (b)–(e).



CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb134.pdf

13. Klasse Übungsaufgaben	**13**
Geradengleichungen	**04**

1. Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

   Prüfen Sie, ob die folgenden Punkte auf g liegen:

   $Q(1|4|3)$, $R(0|2|1)$, $S(5|0|2)$.

   Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes T auf g mit $T(?|?|0)$.

2. Zeigen Sie, dass die Punkte $A(-2|-2|8)$, $B(4|4|4)$, $C(2|2|\frac{16}{3})$ und $D(-17|-17|18)$ auf einer Geraden liegen, indem Sie die Gleichung der Geraden AB aufstellen und zeigen, dass C und D auf AB liegen.

3. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $D(2{,}5|-0{,}5|1)$ von der Geraden AB durch $A(-1|-1|1)$ und $B(2|-2|1)$ und berechnen Sie damit die Fläche des Dreiecks ABD. Vergleichen Sie mit dem Vektorprodukt-Ergebnis (vgl. grund120.pdf).

4. Geben Sie die besondere Lage der folgenden Geraden im Koordinatensystem an:

   (a) $g: \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$.

5. Gegeben ist die Schar der Punkte $P_a(a|14|12-3a)$ mit dem reellen Parameter a.

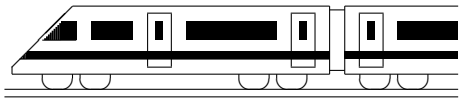
   (a) Geben Sie in Punkt-Richtungsform die Gleichung der Geraden g an, auf der alle Punkte P_a liegen.

   (b) Geben Sie an, welche Lage haben die Punkte $P_{0,5}$, P_0 und P_1 zueinander haben.
   Geben Sie an, welche Lage haben die Punkte P_{-1}, P_0 und P_1 zueinander haben.

6. (a) Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}$.

   Geben Sie die Gleichung der Geraden p an, die durch senkrechte Projektion von g in die x_1x_2-Grundebene entsteht.

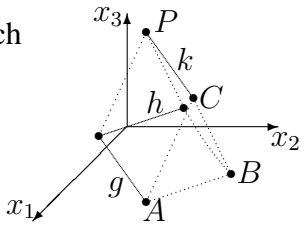
   (b) Nun werde im zweidimensionalen Raum die Gerade $y = -\frac{1}{2}x + 2{,}5$ betrachtet. Ermitteln Sie eine mögliche Beschreibung dieser Geraden in Punkt-Richtungsform.



CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb135.pdf

13. Klasse Übungsaufgaben | 13
Ebenengleichungen, Kugelgleichungen | 05

1. Das nebenstehende am Hang stehende Zelt ist gegeben durch $A(8|5|0)$, $B(5|8|0)$, $C(7|7|5)$, $P(2|2|6)$ sowie die Geraden

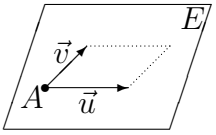


$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}, \text{ und } k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R}.$$

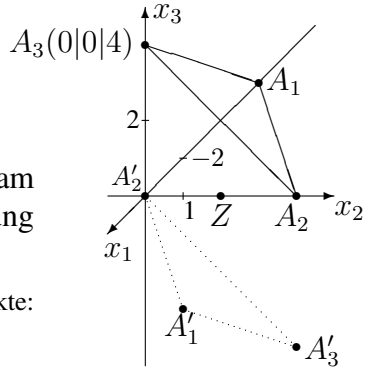
   Stellen Sie Ebenengleichungen in Parameterform auf:
   (a) Ebene E_1, die durch die Punkte A, B, C gegeben ist.
   (b) Ebene E_2, die durch die Gerade k und den Punkt B festgelegt ist.
   Überzeugen Sie sich zuvor davon, dass der Punkt B nicht auf der Geraden k liegt.
   (c) Ebene E_3, die durch die beiden echt parallelen Geraden g und k festgelegt ist.
   (d) Ebene E_4, die durch die sich schneidenden Geraden g und h festgelegt ist.

2. Gegeben sind der Punkt $A(2|-3|1)$ und die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Warum ist $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, keine Ebene?
   (b) Betrachten Sie nun die Ebene E mit Aufpunkt A und Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$.
   Wenn man für die Parameter nur Zahlen aus dem Intervall $[0;1]$ zulässt, also $\lambda, \mu \in [0;1]$, so erreicht man nur Punkte im nebenstehend dargestellten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramm. Zeigen Sie durch Einsetzen in die Parameterform, dass $P(1|-4|3)$ zwar auf E, aber nicht im eben genannten Parallelogramm liegt.



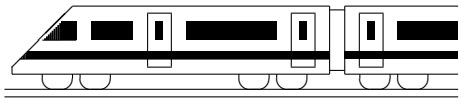
3. Gegeben sind die Punkte $A(3|0|3)$, $B(6|16|5)$, $C(0|4|5)$ und $D(4|-3|2)$.
   Erklären Sie, warum man mit dem sog. Spatprodukt $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD}$ (siehe grund120.pdf) prüfen kann, ob die Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen.
   Was bedeutet dies im Fall der hier gegebenen Punkte für die lineare (Un-?)Abhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$?

4. Gegeben ist die hier dargestellte Ebene E.



   (a) Geben Sie eine Gleichung von E an.
   (b) Spiegeln Sie die Punkte $A_1(-6|0|0)$, A_2, A_3 am Punkt $Z(0|2|0)$ und stellen Sie damit die Gleichung der gespiegelten Ebene E' auf.
   Tipp: Mögliche Vorgehensweise zum Spiegeln der Punkte: $\overrightarrow{ZA_1'} = \overrightarrow{A_1Z}$ mit „Spitze minus Fuß“ nach $\vec{A_1'}$ auflösen.

5. Geben Sie die Gleichung der Kugel um $M(3|-5|0)$ mit Radius 6 an, und prüfen Sie, ob der Ursprung $O(0|0|0)$ innerhalb, auf oder außerhalb der Kugel liegt.



CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb136.pdf

13. Klasse Übungsaufgaben	**13**
Koordinatenform und HNF von Ebenen	**06**

1. Bestimmen Sie jeweils eine Koordinatenform der folgenden Ebenen

   (a) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   (b) $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   (c) $E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   (d) Geben Sie jeweils die besondere Lage der Ebene im Koordinatensystem an.

   (e) Alternativ zum Vektorprodukt ist auch eine Umwandlung von der Parameter- in die parameterfreie Normalform möglich durch Eliminieren der Parameter.
   Beispiel mit der Ebene E aus grund127.pdf:

$$\begin{array}{rcll} x_1 &=& 1+\lambda+2\mu & |\cdot(-4) \quad |\cdot(-3) \\ x_2 &=& 2+4\lambda+3\mu & | \\ \underline{x_3} &=& \underline{1+3\lambda+5\mu} & \underline{\qquad\qquad |} \\ -4x_1+x_2 &=& -2 \quad -5\mu & | \\ \underline{-3x_1+x_3} &=& \underline{-2 \quad -\mu} & \underline{|\cdot(-5)} \\ E: 11x_1+x_2-5x_3 &=& 8 & \end{array}$$

   Relativ schnell geht dies bei den Ebenen aus den Teilaufgaben (b) und (c); führen Sie dies aus!

   (f) Lohnend ist die Methode aus Teilaufgabe (e) auch bei der Umwandlung von Geraden im $\mathbb{R}^2$. Bringen Sie auf diese Weise die Gerade $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf die Form $x_2 = mx_1 + t$.

2. Stellen Sie die Lotgerade auf die Ebene $E : 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 24$ durch den Punkt $P(1|1|-1)$ auf. Zeigen Sie, dass P nicht auf E liegt.

3. Schreiben Sie die Ebene $E : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = 0$ in der Form $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und zeigen Sie dann, dass $P(1|-4|6)$ auf E liegt.

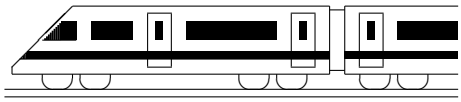
4. Gegeben sind die Ebenen $E : 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 14$ und $F : -x_1 + 4x_2 + x_3 = -12$.

   (a) Berechnen Sie jeweils die Hesse-Normalform (HNF)!

   (b) Liegt der Punkt $P(4|2|-6)$ näher an E oder an F?

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte $(0|0|x_3)$ auf der x_3-Achse, die Abstand 10 von der Ebene E haben.

   (d) Welchen Gleichung hat eine Kugel um $M(9|7|6)$, die die Ebene E genau berührt? Falls die Kugel k um M den Radius 13 hat, welchen Radius hat dann der Schnittkreis mit der Ebene E?



CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb137.pdf

13. Klasse Übungsaufgaben	**13**
Lagebeziehung Gerade – Gerade	**07**

1. Weisen Sie die Lagebeziehung für die Geraden aus grund135.pdf nach:
$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Gegeben sind die Geraden aus ueb135.pdf, Aufgabe 1:
$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\lambda, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

   (a) Warum kann man die Lagebeziehung von g und h schnell sehen?

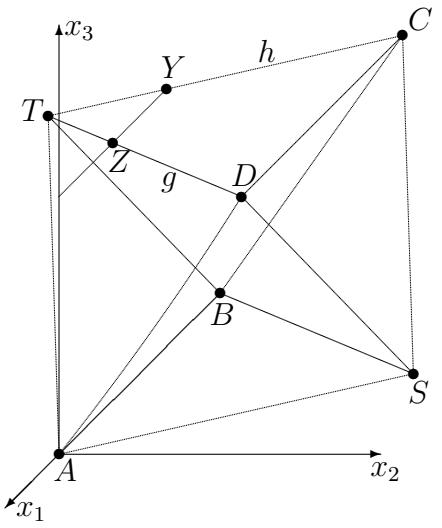
   (b) Weisen Sie die Lagebeziehung von g und k nach.

3. Gegeben sind die Geraden $g_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
$g_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $g_4: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$.
Untersuchen Sie jeweils die Lagebeziehung:

   (a) g_1 und g_2; (b) g_2 und g_3; (c) g_3 und g_4; (d) g_1 und g_4;

   falls sich die Geraden schneiden, bestimmen Sie auch den Schnittwinkel; falls die Geraden parallel sind, bestimmen Sie auch den Abstand.

4. Gegeben ist das nebenstehende Oktaeder durch $A(0|0|0)$, $B(-6|0|0)$, $C(-6|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $D(0|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$ und $S(-3|3\sqrt{3}|0)$.

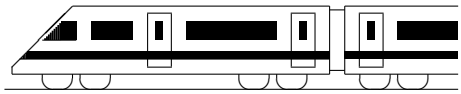


   (a) T ist der Schnittpunkt der Geraden g und h, wobei g eine Parallele zu BS durch D ist und h eine Parallele zu AS durch C ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von T.

   (b) Die im Bild gezeigte Gerade hat die Gleichung $YZ: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

   Zeigen Sie, dass die Gerade YZ und die x_3-Achse sich schneiden.

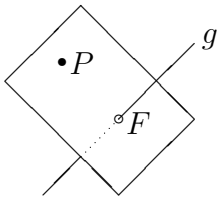
Ergänzender Hinweis: Der Abstand der windschiefen Geraden AS und g kann hier leicht bestimmt werden, da AS in der Ebene $x_3 = 0$ und g in der parallelen Ebene $x_3 = 2\sqrt{6}$ liegt. Der Abstand der beiden windschiefen Geraden ist also $2\sqrt{6}$.



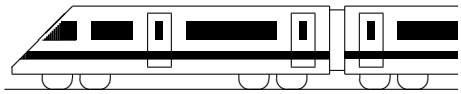
CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb138.pdf

13. Klasse Übungsaufgaben	**13**
Lagebeziehung Gerade – Ebene	**08**

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und der gegebenen Ebene; falls sie sich schneiden, berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel, falls sie echt parallel sind, den Abstand $d(g, E)$.
   (a) $E : x_1 - x_2 - 5x_3 = 26$
   (b) $E : 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 8 = 0$
   (c) $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$
2. Gegeben sind die Ebene $E : 4x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 3$ und mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$ die Schar der Geraden $g_k : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -5 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$. Für welchen Wert des Parameters k sind E und g_k (a) parallel, (b) senkrecht zueinander?
3. Gegeben sind $s : \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, sowie $E_1 : x_1 + 2x_3 = 4$ und $E_2 : 3x_1 - 4x_2 = 0$.
   (a) Zeigen Sie, dass die Gerade s in beiden Ebenen E_1 und E_2 enthalten ist und somit die Schnittgerade darstellt.
   (b) Berechnen Sie für die Ebenen die Achsenpunkte und die Gleichungen der Spurgeraden und für die Gerade die Spurpunkte. Zeichnen Sie die Ebenen und die Gerade in ein Koordinatensystem.
4. **Lot fällen (d. h. Punkt P auf Ebene projizieren), Punkt an Ebene spiegeln**
   Aus grund136.pdf ist folgende Vorgehensweise bekannt: Mit Aufpunkt P und Richtungsvektor = Normalenvektor der Ebene stellt man die Gleichung der Lotgeraden auf und schneidet sie mit der Ebene.
   Beispiel: Lot vom Punkt $P(-1|-2{,}4|-2{,}5)$ auf $E : 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 = 60$:
   Lotgerade $l : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2{,}4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ in E: $15(-1+15\tau)+12(-2{,}4+12\tau)+20(-2{,}5+20\tau) = 60$, $\tau = 0{,}2$, also Fußpunkt $F(2|0|1{,}5)$.
   Spiegelpunkt P': $\overrightarrow{FP'} = \overrightarrow{PF}$, also $\vec{P'} - \vec{F} = \vec{F} - \vec{P}$, also $\vec{P'} = 2\vec{F} - \vec{P}$, hier also $P'(5|2{,}4|5{,}5)$.
   Berechnen Sie ebenso Lotfußpunkt und P' für $P(9|2|-5)$ und $E : x_1 - 3x_3 = 4$.
5. **Lotfußpunkt eines Punktes P auf eine Gerade g**
   Zur Bestimmung des Abstands eines Punktes P von einer Geraden g kann anstelle des Verfahrens von grund134.pdf auch durch den Punkt P eine Ebene senkrecht zu g aufgestellt werden und die Gerade g mit dieser Ebene geschnitten werden.



   Beispiel: $P(1|-1|4)$ und g_1 aus Aufgabe 2.
   Ansatz für $E : 2x_1 + x_2 - 5x_3 = d$. Einsetzen von P liefert $d = 2 - 1 - 20 = -19$.
   g_1 in E eingesetzt: $2 \cdot (7 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - 5(-2 - 5\lambda) = -19$; $\lambda = -1{,}5$.
   λ in g_1 liefert $F(4|0{,}5|5{,}5)$ und damit Abstand $\left|\overline{PF}\right| = \sqrt{13{,}5}$ wie in grund125.pdf.
   Berechnen Sie so den Abstand des Punktes $P(0|0|-27)$ von s aus Aufgabe 3.
6. Beschreiben Sie, wie man die Schnittpunkte der Geraden s aus Aufgabe 3 mit der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 27)^2 = 27^2$ berechnen kann.



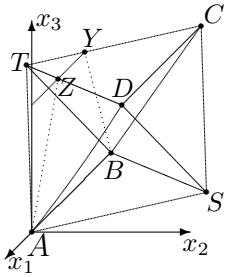
CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb139.pdf

13. Klasse Übungsaufgaben	**13**
Lagebeziehung Ebene – Ebene	**09**

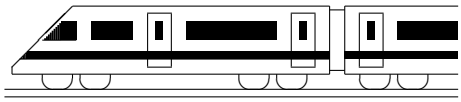
1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen; falls sie parallel sind, bestimmen Sie den Abstand; falls sie sich schneiden, Schnittgerade und Schnittwinkel.
   (a) $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$ und $E_2 : 4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9$
   (b) $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$ und $E_2 : -x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 6$
   (c) $E_1 : 14x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ und $E_2 : 3{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1$

2. Geben Sie zur Ebene $E : x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4$ die Gleichung einer Ebene F an, die darauf senkrecht steht und die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, enthält.

3. In der Situation von ueb137.pdf/Aufgabe 4 ist durch die Punkte $A(0|0|0)$, $B(-6|0|0)$, $C(-6|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $D(0|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $S(-3|3\sqrt{3}|0)$ und $T(-3|-\sqrt{3}|2\sqrt{6})$ ein Oktaeder gegeben. Dabei sind alle Kanten gleich lang (z. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{(-6-0)^2 + 0^2 + 0^2} = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{0 + (2\sqrt{3}-0)^2 + (2\sqrt{6}-0)^2} = 6$), und die Querschnittsflächen (z. B. $ABCD$) sind Quadrate (z. B. $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = (-6) \cdot 0 + 0 \cdot 2\sqrt{3} + 0 \cdot 2\sqrt{6} = 0$, also $\sphericalangle BAD = 90°$).



   (a) Die Ebene ASD hat die Gleichung $E_{ASD} : \sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = 0$. Zeigen Sie, dass die durch die Punkte B, C und T gegebene Ebene parallel zu E_{ASD} ist.
   (b) Die im Oktaeder liegende Kugel um $M(-3|\sqrt{3}|\sqrt{6})$ mit Radius $\sqrt{6}$ berührt alle Seitenflächen, z. B. die Seitenfläche BCT im Punkt $Q(-5|\frac{1}{3}\sqrt{3}|\frac{4}{3}\sqrt{6})$.
   Der Radius $\overline{MQ}$ steht senkrecht auf der Tangentialebene, d. h. $\overrightarrow{MQ}$ ist Normalvektor der Ebene; man kann nachrechnen, dass $\overrightarrow{MQ}$ ein Vielfaches des Normalvektors der Ebene E_{ASD} ist.
   Stellen Sie nun mit dieser Information die Gleichung der Parallelebene zu E_{ASD} durch den Punkt Q auf, und zeigen Sie, dass der Punkt B darauf liegt.
   (c) Der Mittelpunkt M der Kugel hat von der Ebene ABS und der Ebene ASD den gleichen Abstand, liegt also auf einer winkelhalbierenden Ebene dieser beiden Ebenen. Stellen Sie die Gleichungen dieser winkelhalbierenden Ebenen auf.
   (d) Bei geeigneter Beleuchtung wirft das Dreieck ASD einen Schatten auf die x_1x_2-Grundebene, so dass das projizierte Dreieck ASD' bei D' rechtwinklig ist und D' auf der Geraden $p : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, liegt. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung von D'.
   (e) Die x_1x_3-Ebene schneidet die Ebene $E_{TDC} : x_3 = 2\sqrt{6}$ in der Geraden YZ. Berechnen Sie mit dieser Information eine Gleichung der Geraden YZ.
   (f) Das Viereck $ABYZ$ ist ein gleichschenkliges Trapez mit Flächeninhalt $8\sqrt{6}$.
   (Y und Z können als Schnittpunkte der Geraden CT und DT mit der Ebene $x_2 = 0$ berechnet werden. Da die parallelen Geraden YZ und AB beide in der x_1x_3-Ebene verlaufen, AB in Höhe $x_3 = 0$, YZ in Höhe $x_3 = 2\sqrt{6}$, ist der Geradenabstand $d(YZ, AB) = 2\sqrt{6}$ und somit die Fläche $A_{ABYZ} = \frac{|\overline{AB}|+|\overline{YZ}|}{2} \cdot d(YZ, AB)$).
   Die x_1x_3-Ebene zerlegt das Oktaeder in zwei Teile. Wie kann berechnet werden, wie viel % die Pyramide $ABYZT$ vom ganzen Oktaeder ausmacht?



CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb130.pdf

13. Klasse Übungsaufgaben	**13**
Steckbriefaufgabe, Optimierung	**10**

1. Berechnen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P(2012|2013)$ und $Q(2015|2014)$

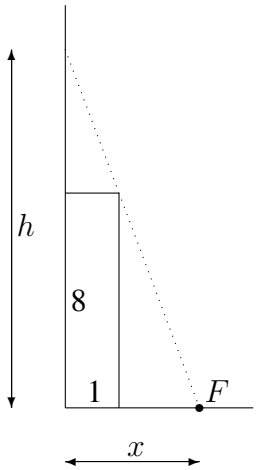
2. Berechnen Sie den Term einer Polynomfunktion 3. Grades mit waagrechter Tangente im Punkt $(1|-64)$ und Nullstelle $x = 5$, die durch den Punkt $(0|-65)$ geht.

   [Zur Kontrolle: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 65$]

   Zeigen Sie mit Hilfe der Monotonie, dass es keine weitere Nullstellen gibt.

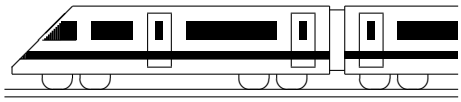
3. Bestimmen Sie mit dem Ansatz $f(x) = (x + a)e^{bx}$ den Term einer Funktion, die die y-Achse bei $y = 1$ mit Steigung 3 schneidet.

4. An eine hohe Hauswand, vor der wie in nebenstehender (nicht maßgetreuer) Skizze ein 1 m breiter und 8 m hoher Anbau steht, soll wie in der Skizze eine möglichst kurze Leiter gelehnt werden.
   Berechnen Sie, in welcher Entfernung x vom Hochhaus der untere Punkt F der Leiter zu wählen ist.



5. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird gelegentlich das Produkt der Wahrscheinlichkeit p ($\in [0; 1]$) mit der Gegenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ benötigt.

   Begründen Sie, wann dieses Produkt besonders groß/klein ist.



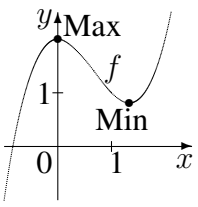
CC BY-SA: www.strobl-f.de/ueb13k.pdf

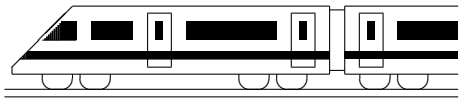
13. Klasse Übungsaufgaben | 13
Kompakt-Überblick zum Grundwissen | K

1. Integration (siehe auch grund131.pdf):
   (a) Mit welchen „Tricks“ berechnet man eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$?
   (b) Berechnen Sie $\int_0^4 (0{,}25x-2)dx$ und deuten Sie das Ergebnis elementargeometrisch!
2. Integralfunktion, Integralanwendungen (siehe auch grund132.pdf):
   (a) Sei $I(x) = \int_0^x (e^t - t)dt$. Bestimmen Sie den Wendepunkt dieser Integralfunktion.
   (b) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 1$; $g(x) = -x^2 - 1$.
3. Normalverteilung (siehe auch grund133.pdf):
   In einer Spiel-Show sollen die Kandidaten durch Drücken eines Buzzers eine Zeitdauer von 60 s schätzen. Die Zufallsgröße X der von den Kandidaten angegebenen Zeitdauer (in s) habe die Dichte $\varphi(x) = \frac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-56)^2}{2\cdot 1{,}5^2}}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten:
   A: „Es wird zu spät …“, B: „Es wird gerundet auf ganze Sekunden nach 60 s …“,
   C: „Es wird genau nach 60 s …“, D: „Es wird über 5 s zu früh gedrückt.“
   Nach neuen Spielregeln gewinnt, wer in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ drückt, die Gewinnchance soll 99 % betragen; geben Sie ein möglichst kleines Intervall hierfür an.

In den Aufgaben 4 bis 9 sind gegeben: Punkte $A(0|1|4)$, $B(-1|-1|2)$, $C(4|3|0)$, $P(0|0|4)$ und Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$.

4. Geradengleichungen (siehe auch grund134.pdf):
   Prüfen Sie durch Aufstellen der Geradengleichung, ob C auf der Geraden AB liegt!
   Bestimmen Sie den Abstand der parallelen Geraden AB und h_1.
5. Ebenengleichungen, Kugelgleichungen (siehe auch grund135.pdf):
   g und der Mittelpunkt N von $\overline{AP}$ legen eine Ebene E_1 fest. Geben Sie deren Gleichung in Parameterform an! [Kugel → Aufgabe 6]
6. Koordinatenform und HNF von Ebenen (siehe auch grund136.pdf):
   Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E_2, die A, B, C enthält!
   Geben Sie die Gleichung der Lotgerade l auf E_2 durch P an!
   Geben Sie die Gleichung der Kugel mit Mittelpunkt P an, die diese Ebene berührt!
7. Lagebeziehung Gerade – Gerade (siehe auch grund137.pdf):
   Welche Lage haben die Geraden g und h_2 zueinander? Falls sie sich schneiden: Bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel.
8. Lagebeziehung Gerade – Ebene (siehe auch grund138.pdf):
   Welche besondere Lage hat $E_3: 2x_1 - 7x_3 = 4$ im Koordinatensystem? Geben Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und jeweils den Schnittwinkel an.
9. Lagebeziehung Ebene – Ebene (siehe auch grund139.pdf):
   Gegeben sind $E_4: 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und $E_5: 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$. Bestimmen Sie die Schnittgerade s. (Übrigens ist s mit g identisch.)
10. Steckbriefaufgabe, Optimierung (siehe auch grund130.pdf)
    Stellen Sie für nebenstehenden Graphen (mit Max$(0|2)$ und Min$(\frac{4}{3}|\frac{22}{27})$) ein Gleichungssystem auf zur Berechnung des Terms einer ganzrationalen Funktion dritten Grades (siehe Aufgabe 2 (c)).
    Es ergibt sich $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$. Stellen Sie den Ansatz auf zur Berechnung des Punktes im ersten Quadranten mit kleinstem Abstand vom Ursprung.





CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg131.pdf

13. Klasse Lösungen | 13
Integration | 01

1.

(a) Da f streng monoton steigend ist, nimmt die Funktion jeweils am rechten Streifenrand ihren größten Wert an. Daher ist $A \leq$ „Summe Streifenbreite · Streifenhöhe“ $1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) = \frac{e^{-1}}{e^{-1}+1} + \frac{e^0}{e^0+1} + \frac{e^1}{e^1+1} + \frac{e^2}{e^2+1} \approx 2{,}38$.

(b) $A = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \left[\ln(e^x+1)\right]_{-2}^{2} = \ln(e^2+1) - \ln(e^{-2}+1) = 2$.
Die Abweichung $0{,}38$ sind $\frac{0{,}38}{2} = 0{,}19 = 19\,\%$ hiervon.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = 1$ beschreibt einen Sättigungswert, dem sich die Verkaufszahlen auf lange Dauer nähern.
Das Integral A beschreibt einen Gesamtbestand, d. h. die Gesamtzahl der verkauften Autos im Zeitraum von vier Jahren (seit Markteinführung vor zwei Jahren bis in zwei Jahren) gemäß dieser Modellierung.

2.

$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi}$
$= -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$
Für die Stammfunktion von $\sin(\frac{1}{2}x)$ muss man den durch Nachdifferenzieren entstehenden Faktor $\frac{1}{2}$ durch einen Vorfaktor 2 ausgleichen: $\int_0^{2\pi} h(x)dx = \int_0^{2\pi} 2\sin(\frac{1}{2}x)dx$
$= [-2 \cdot 2\cos(\frac{1}{2}x)]_0^{2\pi}$
$= -4\cos(\frac{1}{2} \cdot 2\pi) - (-4\cos 0)$
$= -4 \cdot (-1) + 4 = 8$
Da Ergebnis ist 4-mal so groß.
Der Graph von h entsteht aus dem Graphen von f durch Streckung in y-Richtung mit Faktor 2 (doppelte Amplitude) und durch Streckung auch in x-Richtung auf doppelte Größe (doppelte Periodenlänge/„$\frac{1}{2}x$“ im Term); da man sowohl in Länge als auch in Höhe den Faktor 2 hat, ist die Fläche 4-fach.

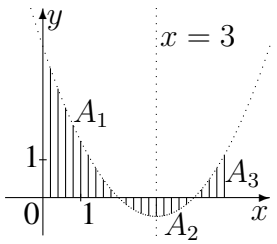
3.

(a) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3-x-5}{x^2}dx = \int_{-2}^{-1}(x - \frac{1}{x} - 5x^{-2})dx =$
$\left[\frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + 5x^{-1}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \ln 1 - 5 - (2 - \ln 2 - \frac{5}{2}) \approx -3{,}31$

(b) $\int_0^4 (6x^{\frac{1}{3}} - 5)dx = \left[6 \cdot \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 5x\right]_0^4 =$
$\frac{9}{2} \cdot 4^{\frac{4}{3}} - 20 - 0 \approx 8{,}57$

(c) $\int_0^1 x \cdot e^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1) \approx 0{,}86$

4.

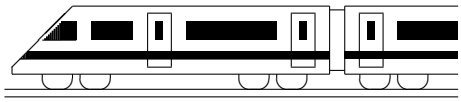
(a) 

Nullstellen:
$f(x) = 0$
$\frac{1}{2}(x-3)^2 = 0{,}5$
$(x-3)^2 = 1$
$x - 3 = \pm 1$
$x_1 = 2,\ x_2 = 4$

(b) $A = A_1 + A_2 + A_3$. A_2 unterhalb der x-Achse: Betrag des Integralwerts:
$A_1 = \int_0^2 (\frac{1}{2}(x-3)^2 - 0{,}5)dx$
$= \left[\frac{1}{6}(x-3)^3 - 0{,}5x\right]_0^2$
$= \frac{1}{6} \cdot (-1) - 1 - (\frac{1}{6} \cdot (-3)^3 - 0) = \frac{10}{3}$
$A_2 = \left|\int_2^4 (\frac{1}{2}(x-3)^2 - 0{,}5)dx\right|$
$= |[\ldots]_2^4| = \ldots = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$
$A_3 = \int_4^5 (\frac{1}{2}(x-3)^2 - 0{,}5)dx = \ldots = \frac{2}{3}$
$A = \frac{10}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

(c) $\int_0^5 (\frac{1}{2}(x-3)^2 - 0{,}5)dx = [\ldots]_0^5 = \frac{10}{3}$
(oder als Flächenbilanz $A_1 - A_2 + A_3$)

(d) $\int_0^3 (\frac{1}{2}(x-3)^2 - a)dx = [\frac{1}{6}(x-3)^3 - ax]_0^3$
$= -3a - (\frac{1}{6} \cdot (-3)^3 - 0) = -3a + 4{,}5$
$-3a + 4{,}5 = 0$ für $a = 1{,}5$
A: Flächenbilanz 0, d. h. gleich große Flächen unter-/oberhalb der x-Achse.
B: ebenso, da in der Gleichung links die Fläche zwischen $x = 0$ und der Nullstelle und rechts der Betrag der unterhalb liegenden Fläche zwischen Nullstelle und $x = 3$ steht.



CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg132.pdf

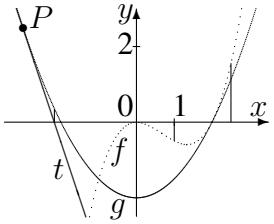
13. Klasse Lösungen | 13
Integralfunktion, Integralanwendungen | 02

1.
$I(x) = [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} = \sin x - \sin\frac{\pi}{2} = \sin x - 1$
$I(0) = \sin 0 - 1 = -1 < 0$
Die Fläche liegt zwar oberhalb der x-Achse, aber „rückwärts“ integrieren (von $\frac{\pi}{2}$ bis 0) ändert das Vorzeichen.

2.
Falls $I(x) = x\cdot(\ln(x+3)-\ln(2x))+3\ln(x+3)-7\ln 2$ Integralfunktion, so muss deren Ableitung den Integranden ergeben:
$I'(x) = 1\cdot\ln\frac{x+3}{2x} + x\cdot(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2x}\cdot 2)+3\cdot\frac{1}{x+3} = \ln\frac{x+3}{2x} + x\cdot\frac{x-(x+3)}{(x+3)\cdot x} + \frac{3}{x+3} = f(x)$.
Mit Hilfe dieser Stammfunktion kann nun integriert werden:
$\int_1^x \ln\frac{x+3}{2x}dx = [I(t)]_1^x = I(x) - I(1) =$
$I(x) - (1\cdot\ln\frac{1+3}{2\cdot 1} + 3\ln(1+3) - 7\ln 2) =$
$I(x) - (\ln 2 + 3\ln 4 - 7\ln 2) = I(x)$, denn $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$.
Aus $f(3) = I'(3) = 0$ folgt, dass I bei $x = 3$ eine waagrechte Tangente hat.

3.

(a) Wegen der Nullstellen $x = 0$ und $x = 2$ und wegen der Lage unterhalb der x-Achse ist



$A_1 = -\int_0^2 f(x)dx = -\int_0^2(\frac{1}{2}x^3 - x^2)dx =$
$-\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = -(2-\frac{8}{3}) = \frac{2}{3}$.

(b) Schnittstellen: $f(x) = g(x)$;
$(x-2)x^2 = (x+2)(x-2)$; also $x_1 = 2$ oder $x^2 = x+2$, d. h. $x^2 - x - 2 = 0$, d. h. $x_{2/3} = \frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$
$A_2 = \int_{-1}^{2}(f(x)-g(x))dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(x^3 - 3x^2 + 4)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} =$
$\frac{1}{2}(4 - 8 + 8 - (\frac{1}{4} - (-1) - 4)) = \frac{27}{8}$.

(c) $A_3 = \int_1^{2,5}(\frac{1}{2}x^3 - x^2)dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^{2,5}$
$= \frac{1}{8}\cdot 2{,}5^4 - \frac{1}{3}\cdot 2{,}5^3 - (\frac{1}{8} - \frac{1}{3}) \approx -0{,}12 < 0$
Von den Flächenstücken, die zu diesem Integral beitragen, liegt mehr unterhalb als oberhalb der x-Achse.

(d) Berechnung der Tangente: $g'(x) = x$, $m = g'(-3) = -3$, Ansatz $y = -3x + t$, P einsetzen $2{,}5 = -3\cdot(-3) + t$ liefert t, also Tangente $t(x) = -3x - 6{,}5$.
Nullstelle der Tangente:
$-3x - 6{,}5 = 0$, also $x = -\frac{13}{6}$.

Das Flächenstück wird durch die Gerade $x = -\frac{13}{6}$ zerlegt in zwei Teile:
$A_4 = \int_{-3}^{-\frac{13}{6}}(g(x) - t(x))dx + \int_{-\frac{13}{6}}^{-2} g(x)dx$
$= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x\right]_{-3}^{-\frac{13}{6}} + \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_{-\frac{13}{6}}^{-2}$
$= \frac{1}{6}\cdot(-\frac{13}{6})^3 + \frac{3}{2}\cdot(-\frac{13}{6})^2 + \frac{9}{2}\cdot(-\frac{13}{6}) - (\frac{1}{6}\cdot(-3)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-3)^2 + \frac{9}{2}\cdot(-3)) + \frac{1}{6}\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2) - (\frac{1}{6}\cdot(-\frac{13}{6})^3 - 2\cdot(-\frac{13}{6})) = \frac{1}{8}$

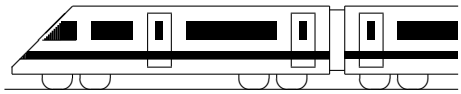
(e) $\int_0^b(\frac{1}{2}x^2 - 2)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_0^b = \frac{1}{6}b^3 - 2b - 0 = 0$, also $b(\frac{1}{6}b^2 - 2) = 0$, also $b_1 = 0$, $b_{2/3} = \pm\sqrt{12}$.

Bei $b = 0$ schrumpft die Fläche auf eine Linie der Breite 0, also Fläche 0.

Bei $b = \pm\sqrt{12}$ haben die Flächenanteile ober- und unterhalb der x-Achse gleichen Inhalt.

4.
A ist die im Zeitraum $[-2;0]$ (also seit 2 Zeiteinheiten vor Beginn der Zeitzählung) zurückgelegte Strecke.
$I'(x) = v(x) < 0$ bedeutet, dass der Graph von I zur Zeit x fallend ist, also wegen negativer Geschwindigkeit nun der Ort abnimmt.

5.
$V = \pi\cdot\int_0^2(3x)^2dx + \pi\cdot\int_1^4(-x+4)^2dx$
$= \pi\cdot\int_0^2 9x^2dx + \pi\cdot\int_1^4 x^2 - 8x + 16dx$
$= \pi\cdot[3x^3]_0^1 + \pi\cdot[\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x]_1^4 =$
$\pi\cdot(3-0) + \pi\cdot(\frac{64}{3} - 64 + 64 - (\frac{1}{3} - 4 + 16)) = 12$

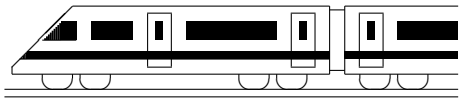


CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg133.pdf

13. Klasse Lösungen | 13
Normalverteilung | 03

1. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist offenbar erfüllt ($2(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$ für $x \geq 0$).
   $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^z 2(x+1)^{-3}dx = \lim_{z\to\infty}[-(x+1)^{-2})]_0^z = \lim_{z\to\infty}(-\frac{1}{(z+1)^2} - (-\frac{1}{1})) = 1.$
2. Als Hochpunkt (bei der Normalverteilung $(\mu|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$ entnimmt man ungefähr $(1|1{,}6)$.
   Also ist $\mu = 1$ und $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 1{,}6$, somit $\sigma \approx \frac{1}{1{,}6\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}25$, was auch mit der Lage der Wendepunkte bei $x = \mu - \sigma \approx 0{,}75$ und $x = \mu + \sigma \approx 1{,}25$ zusammenpasst.

   Da die kumulative Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu,\sigma}$ eine Integralfunktion ist, gilt $\Phi'_{\mu,\sigma}(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x)$, also Steigung $\Phi_{\mu,\sigma}(\mu) = \varphi_{\mu,\sigma}(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 1{,}6$.
   $y = \Phi_{\mu,\sigma}(\mu+\sigma) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma} \varphi_{\mu,\sigma}(x)dx = P_{\mu,\sigma}(X \leq \mu+\sigma)$. Nach den Sigma-Regeln ist $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}68$, somit wegen der Symmetrie außerhalb dieses Bereichs $P(X < \mu - \sigma) = P(X > \mu + \sigma) \approx \frac{1-0{,}68}{2} = 0{,}16$ und somit y-Wert $y = P(X \leq \mu + \sigma) = 1 - P(X > \mu + \sigma) \approx 1 - 0{,}16 = 0{,}84$.
3. (a) $P(A) = P_{\mu=60,\sigma=0{,}46}(X > 60{,}5) = 0{,}13853$
   $P(B) = P_{\mu=60,\sigma=0{,}46}(59,9 < X < 60,1) = 0{,}17210$
   $P(C) = P_{\mu=60,\sigma=0{,}46}(X = 60) = 0$ (Bei stetigen Zufallsgrößen ist die Wahrscheinlichkeit, einen Wert genau zu treffen, stets 0)
   (b) Stellt man sich in der Normalverteilungsdichte einen „links“ von ℓ liegenden Bereich schraffiert mit Wahrscheinlichkeit, also Fläche $0{,}064$ vor, so muss dieser links vom Mittelwert liegen, also $\ell < \mu = 60$; wegen der Sigma-Regel ist im „Außenbereich“ $P(X < \mu - 1{,}64\sigma) \approx 0{,}05$, also gilt $\ell > \mu - 1{,}64\sigma = 60 - 1{,}4 \cdot 0{,}46 = 59{,}25$. Man probiert also mit dem Taschenrechner Werte im Bereich 59,3 bis 59,9 und findet $P_{\mu=60,\sigma=0{,}46}(X \leq 59,3) \approx 0{,}064$, also $\ell \approx 59{,}3$.
   (c) Treffer: Nagel wird beanstandet, Trefferwahrscheinlichkeit $p = P_{\mu=0,\sigma=0{,}46}(X < 59 \text{ oder } X > 61) = 1 - P_{\mu=0,\sigma=0{,}46}(59 \leq X \leq 61) \approx 1 - 0{,}97 = 0{,}03$.
   $P(E) = P_{n=200,p=0{,}03}(Z \geq 6) = 1 - P_{n=200,p=0{,}03}(Z \leq 5) = 1 - 0{,}443 = 0{,}557$ (Binomialverteilung)
   (d) Sigma-Regeln: $P_{\mu,\sigma}(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) = 0{,}95$, also erlaubte Abweichung $1{,}96\sigma = 1{,}96 \cdot 0{,}46 = 0{,}9016 \approx 0{,}9$ (mm).
4. (a) $P_{\mu=5,\sigma=2}(2 \leq X \leq 6) = 0{,}62466 \approx 0{,}62$
   (b) Der bisherige Mittelwert $\mu = 5$ liegt im Intervall $[2;6]$ und der Maximalwert der Normalverteilungs-Dichte somit in diesem Intervall. Gleiches σ bedeutet dass die Kurve nur in x-Richtung verschoben wird. Damit die Fläche in diesem Bereich kleiner wird, sollte man den Mittelwert μ außerhalb wählen, z. B. $\mu = 7$.
   (c) Analog zu (b) sollte man den μ zentraler im Intervall wählen, z. B. Mitte $\mu = 4$.
   (d) Damit weniger im Intervall liegt, sollten die Werte stark nach außen streuen, also wählt man z. B. ein sehr großes $\sigma = 10$.
   (e) Damit mehr im Intervall liegt, sollten die Werte stärker um den Mittelwert konzentriert sein, also wählt man z. B. ein sehr kleines $\sigma = 0{,}5$.
   (f) Bei den hier vorgeschlagenen Werten bestätigt man:
   $P_{\mu=7,\sigma=2}(2 \leq X \leq 6) = 0{,}30 < 0{,}62$, $P_{\mu=4,\sigma=2}(2 \leq X \leq 6) = 0{,}68 > 0{,}62$
   $P_{\mu=5,\sigma=10}(2 \leq X \leq 6) = 0{,}16 < 0{,}62$, $P_{\mu=5,\sigma=0{,}5}(2 \leq X \leq 6) = 0{,}98 > 0{,}62$



CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg134.pdf

13. Klasse Lösungen | 13
Geradengleichungen | 04

1.
Q liegt nicht auf g, denn:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda = -1$ ✓ ↯
$R(0|2|1)$ liegt auf g, denn:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda = -2$ Probe: passt! Probe: passt!
S liegt nicht auf g, denn:
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda = 3$ ↯

Für die x_3-Koordinate von T gilt: $0 = -1 - \lambda$, also $\lambda = -1$, also $T(1|4|0)$.

2.
$$AB: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
C liegt auf g: Wähle $\lambda = \frac{2}{3}$.
D liegt auf g: Wähle $\lambda = -2{,}5$.

3.
$$AB: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Ansatz: $F(-1+3\lambda|-1-\lambda|1)$.
$DF \perp g$, also $\begin{pmatrix} -1+3\lambda-2{,}5 \\ -1-\lambda+0{,}5 \\ 1-1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.
$(-3{,}5+3\lambda)\cdot 3 + (-0{,}5-\lambda)\cdot(-1) + 0 = 0$.
$-10+10\lambda = 0$. $\lambda = 1$. Also $F(2|-2|1)$.
Abstand $d(D,AB) = |\overrightarrow{DF}| =$
$= \sqrt{(2-2{,}5)^2 + (-2+0{,}5)^2 + (1-1)^2} =$
$= \sqrt{2{,}5}$.
Dreiecksfläche A_{ABD}: $\overline{DF}$ ist die Höhe im Dreieck ABD auf der Grundlinie $\overline{AB}$, also $A_{ABD} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{DF}\right| =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{2{,}5} = \frac{5}{2}$.
Gleiches Ergebnis bei Berechnung mit dem Vektorprodukt: $A_{ABD} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{5}{2}$.

4.

(a) Aufpunkt $(0|0|0)$, also ist g eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems.

(b) x_2-Komponente konstant 5, also ist h parallel zur x_1x_3-Ebene.

5.

(a) Die Punktkoordinaten können direkt in eine Geradengleichung übertragen werden („allgemeiner Geradenpunkt rückwärts“):
$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(b) Die drei Punkte haben jeweils gleichen Abstand voneinander.

Mögliche Formulierungen:

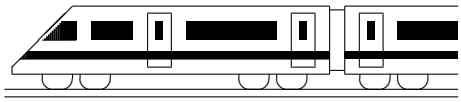
$P_{0,5}$ ist Mittelpunkt von P_0 und P_1.

P_{-1} ist der Spiegelpunkt von P_1 bei Spiegelung am Punkt P_0.

6.

(a) Die x_3-Koordinate wird 0:
$$p: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

(b) y-Achsenabschnitt $(0|2{,}5)$ als Aufpunkt. Wegen Steigung $-\frac{1}{2}$ Richtungsvektor „2 nach rechts, 1 nach unten“, also
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Dies ist übrigens die in die x_1x_2- bzw. xy-Grundebene eingebettete Gerade aus Teilaufgabe (a), denn der Punkt $(0|2{,}5|0)$ liegt auf p, wie man mit $\tau = -1{,}5$ sieht.



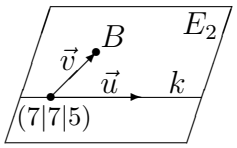
CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg135.pdf

13. Klasse Lösungen | 13
Ebenengleichungen, Kugelgleichungen | 05

1. (a) $E_1 : \vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}) + \mu(\vec{C} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Möglich sind auch Lösungen z. B. mit $\vec{X} = \vec{B} + \lambda(\vec{A} - \vec{B}) + \mu(\vec{C} - \vec{B})$).

   (b) B in k: $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert $5 = 7 - 5\sigma$, also $\sigma = 0{,}4$, Probe in zweiter Gleichung $8 = 7 - 5\sigma$ Widerspruch, also B nicht auf k.

   $E_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.



   (c) $E_3 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (d) $E_4 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. (a) Da der erste Richtungsvektor das 4-fache des zweiten ist, zeigen diese in die gleiche Richtung, sind also linear abhängig, sodass keine Ebenengleichung entsteht.

   (b) P in E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\begin{array}{rrl} I. & 1 &= 4 + 2\lambda + \mu \\ II. & -4 &= -3 + 4\lambda + \mu \\ III. & 3 &= 1 + \lambda \end{array}$

   $III./I.$ ergeben $\lambda = 2$ und $\mu = -9$. Probe in $II.$ stimmt. Also liegt P auf E, wegen $\lambda \notin [0; 1]$ aber nicht im Parallelogramm.

3. $\frac{1}{6}$ des Spatprodukts gibt das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten A, B, C, D an. Ist das Volumen 0, so liegen A, B, C, D in einer Ebene. Spatprodukt hier:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 60 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 24 + 36 - 60 = 0.$$

   Also liegen die Vektoren in einer Ebene und sind somit linear abhängig.

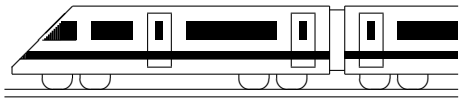
4. (a) Mit den Punkten A_1, $A_2(0|4|0)$, A_3 stellt man die Gleichung der Ebene auf:

   $E : \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (b) $\overrightarrow{ZA_i'} = \overrightarrow{A_iZ}$, also $\vec{A}_i' - \vec{Z} = \vec{Z} - \vec{A}_i$, also $\vec{A}_i' = 2\vec{Z} - \vec{A}_i$ liefert $A_1'(6|4|0)$, $A_2'(0|0|0)$, $A_3'(0|4|-4)$. Mit diesen Punkten stellt man die Gleichung von E' auf:

   $E' : \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

5. $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - (-5))^2 + (x_3 - 0)^2 = 6^2$, also $(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 5)^2 + x_3^2 = 36$ (bzw. ausquadriert $x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 + 10x_2 + x_3^2 = 2$).
   Wegen $\left|\overline{MO}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 0} = \sqrt{34} < 6$ liegt O innerhalb der Kugel.



CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg136.pdf

13. Klasse Lösungen | 13
Koordinatenform und HNF von Ebenen | 06

1.

(a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ oder bequemer mit dem $\frac{1}{5}$-fachen $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ansatz: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = d$. Einsetzen von $(11|2|-10)$ liefert $d = 0$.

Also $E_1 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

(b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder bequemer mit dem $\frac{1}{3}$-fachen $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ansatz: $2x_1 - x_2 = d$. Einsetzen von $(2|6|-1)$ liefert $d = -1$.

Also $E_2 : 2x_1 - x_2 = -2$.

(c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder bequemer mit dem $-\frac{1}{3}$-fachen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ansatz: $x_2 = d$.
Einsetzen von $(2|6|-1)$ liefert $d = 6$.

Also $E_3 : x_2 = 6$.

(d) E_1 geht durch den Ursprung, E_2 ist parallel zur x_3-Achse, E_3 ist parallel zur x_1x_3-Ebene.

(e) Zu E_2:
$$\begin{array}{ll} x_1 = 2 + \lambda - \mu & |\cdot(-2) \\ x_2 = 6 + 2\lambda - 2\mu & | \\ \hline -2x_1 + x_2 = 2 & \end{array}$$

Zu E_3: Zweite Zeile $x_2 = 6$ liefert direkt die parameterfreie Form.

(f)
$$\begin{array}{ll} x_1 = 1 + 2\lambda & |\cdot 3 \\ x_2 = 2 - 3\lambda & |\cdot 2 \\ \hline 3x_1 + 2x_2 = 7, \text{ also } x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1. & \end{array}$$

2.

$P \notin E$, denn Einsetzen von P in E liefert $2 - 3 - 7 \stackrel{?}{=} 24$ Widerspruch.

Lotgerade: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

3.

Skalarprodukt ausführen: $3(x_1 + 2) + 3x_2 - (x_3 - 9) = 0$, also $3x_1 + 3x_2 - x_3 = -15$.
P in E ergibt eine wahre Aussage:
$3 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) - 6 = -15$ (wahr).

4.

(a) $|\vec{n}_E| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$,
HNF: $E : \frac{1}{7}(3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 14) = 0$.

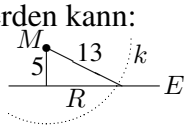
$|\vec{n}_F| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$,
HNF: $F : \frac{1}{3\sqrt{2}}(x_1 - 4x_2 - x_3 - 12) = 0$.

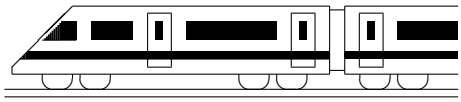
(b) Mit der HNF berechnet man den Abstand des Punktes P von den Ebenen:
$d(P, E) = |\frac{1}{7}(3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-6) - 14)| = 6$.
$d(P, F) = |\frac{1}{3\sqrt{2}}(4 - 4 \cdot 2 - (-6) - 12)| = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36$.
Also liegt P näher an F.

(c) Bei Einsetzen in die HNF muss 10 oder -10 resultieren:
$\frac{1}{7}(6x_3 - 14) = \pm 10$, also
$x_3 = \frac{\pm 70 + 14}{6}$, die gesuchten Punkte sind also $(0|0|14)$ und $(0|0|-\frac{28}{3})$.

(d) Radius $r = d(M, E) = |\frac{1}{7}(3 \cdot 9 - 2 \cdot 7 + 6 \cdot 6 - 14)| = 5$.
Also Kugel ($\rightarrow$ grund135.pdf):
$(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 7)^2 + (x_3 - 6)^2 = 25$.

Aus der Skizze erkennt man, dass der Radius R des Schnittkreises mit Pythagoras berechnet werden kann:
$5^2 + R^2 = 13^2$, also $R = 12$.





CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg137.pdf

13. Klasse Lösungen | 13
Lagebeziehung Gerade – Gerade | 07

1.
Parallele Ri.vektoren $\vec{u}_h = (-2)\vec{u}_g$.
Aufpunkt von h $(1|4|3)$ liegt nicht auf g (denn $1 = 2+\lambda$, $4 = 6+2\lambda$, $3 = -1-\lambda$ ergibt aus erster Gleichung $\lambda = -1$ im Widerspruch zur dritten Gleichung).
Also sind g und h echt parallel.

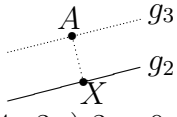
2.
(a) g und h haben gleichen Aufpunkt A, die Ri.vektoren zeigen aber in verschiedene Richtung (nicht Vielfache). Also schneiden sich g, h in $A(3|0|1)$.

(b) g und k haben gleiche Ri.vektoren. Aufpunkt von k $(7|7|5)$ liegt nicht auf g (denn $7 = 3-5\lambda$, $7 = 0-5\lambda$, $5 = 1+\lambda$ führt bereits in den ersten beiden Gleichungen zum Widerspruch). Also sind g und k echt parallel.

3.
(a) Ri.vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt
$-1+\lambda=1$, $-1=2+\mu$, $1-3\lambda=4+3\mu$.
Also $\lambda = 2$, $\mu = -3$, Probe in dritte Gleichung stimmt.
Also schneiden sich g_1 und g_2.
Schnittpunkt $S(1|-1|-5)$.
Schnittwinkel φ aus $\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|} = \frac{|1\cdot 0+0\cdot 1+(-3)\cdot 3|}{\sqrt{1+0+9}\cdot\sqrt{0+1+9}} = 0{,}9$, also $\varphi \approx 25{,}84°$.

(b) Ri.vektoren $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ parallel ($\vec{u}_3 = 2\vec{u}_2$). Aufpunkt von g_3 $(2|4|8)$ eingesetzt in g_2 ergibt bereits in der ersten Zeile $2 = 1+0\mu$ einen Widerspruch, also sind g_2 und g_3 echt parallel.

Abstand des g_3-Aufpunkts $A(2|4|8)$ von der Geraden g_2:
Fußpunkt X als allg. g_2-Geradenpunkt ansetzen: $X(1|2+\mu|4+3\mu)$. Bedingung: $\overrightarrow{AX} \perp g_2$, also $\overrightarrow{AX} \circ \vec{u}_2 = 0$;
$\begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+\mu-4 \\ 4+3\mu-8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$;



$(-1)\cdot 0+(-2+\mu)\cdot 1+(-4+3\mu)\cdot 3 = 0$;
$10\mu = 14$; $\mu = 1{,}4$; also $X(1|3{,}4|8{,}2)$.

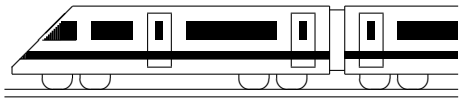
(Fortsetzung von Aufgabe 3(b))
Gesuchter Abstand $d(g_2, g_3) = |\overrightarrow{AX}|$
$= \sqrt{(1-2)^2+(3{,}4-4)^2+(8{,}2-8)^2}$
$= \sqrt{1{,}4} \approx 1{,}18$.

(c) Ri.vektoren $\vec{u}_3 \| \vec{u}_4$ ($\vec{u}_4 = -1{,}5\vec{u}_3$). Aufpunkt von g_4 $(2|-4|-16)$ eingesetzt in g_3 ergibt $2 = 2$, $-4 = 4+2\sigma$, $-16 = 8+6\sigma$; aus zweiter Gleichung also $\sigma = -4$, Probe in erster Gleichung stimmt sowieso, in dritter Gleichung $-16 = 8+6\cdot(-4)$ stimmt ebenfalls, also sind g_3 und g_4 identisch.

(d) Ri.vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_4$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt $-1+\lambda = 2$, $-1 = -4-3\tau$, $1-3\lambda = -16-9\tau$. Aus erster und zweiter Gleichung folgen $\lambda = 3$ und $\tau = -1$; Probe in dritter Gleichung $-8 \neq -7$; g_1 und g_4 sind also windschief.

4.
(a) Aufpunkt von g ist D, Richtungsvektor von g ist $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -3-(-6) \\ 3\sqrt{3}-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$, also $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Analog $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Gleichsetzen liefert $3\lambda = -6-3\mu$, $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}\lambda = 2\sqrt{3}+3\sqrt{3}\mu$, $2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$. Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sqrt{3}$ und Addition der zweiten Gleichung liefert $2\sqrt{3}+6\sqrt{3}\lambda = -4\sqrt{3}$, also $\lambda = -1$, $\mu = -1$ und somit Schnittpunkt $T(-3|-\sqrt{3}|2\sqrt{6})$.

(b) x_3-Achse: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ri.vektoren nicht parallel. Gleichsetzen: $-4+2\sigma = 0$, $0 = 0$, $2\sqrt{6} = \tau$.
Also $\sigma = 2$, $\tau = 2\sqrt{6}$, Probe in zweiter Gleichung stimmt. Somit schneiden sich YZ und die x_3-Achse.



CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg138.pdf

13. Klasse Lösungen | 13
Lagebeziehung Gerade – Ebene | 08

1.
Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts $(\lambda|9-4\lambda|-7+\lambda)$ liefert:

(a) $\lambda-(9-4\lambda)-5(-7+\lambda)=26$; $26=26$ (wahr); g liegt in E.

(b) $3\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda)+8=0$; $\lambda=-3$; g und E schneiden sich im Punkt $S(-3|21|-10)$.
Schnittwinkel ψ: $\sin\psi = \frac{|1\cdot3+(-4)\cdot1+1\cdot2|}{\sqrt{1+16+1}\cdot\sqrt{9+1+4}} \approx 0{,}063$; $\psi \approx 3{,}61°$.

(c) $2\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda)=5$; $-5=5$; g und E sind echt parallel.
HNF von E: $|\vec{n}|=\sqrt{4+1+4}=3$, also $E: \frac{1}{3}(2x_1+x_2+2x_3-5)=0$; $d(g,E)=|\frac{1}{3}(2\cdot0+9+2\cdot(-7))|=\frac{5}{3}$.

2.

(a) Die Bedingung $\vec{u}\circ\vec{n}=0$ liefert $2\cdot4+k\cdot2+(-5)\cdot(-10)=0$, also $k=-29$.

(b) Richtungsvektor $\vec{u}$ und Normalvektor $\vec{n}$ müssen Vielfache sein. An der ersten/dritten Koordinate sieht man, dass $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{n}$ sein muss, also $k=\frac{1}{2}\cdot2=1$.

3.

(a) Einsetzen von s in E_1 bzw. E_2: $-4+4\lambda+2(4-2\lambda)=4$; $4=4$ (wahr); $3(-4+4\lambda)-4(-3+3\lambda)=0$; $0=0$ (wahr); also liegt s in E_1 und E_2.

(b) Achsenpunkte A_i von E_1 mit der x_i-Achse: $A_1(4|0|0)$, $A_2(0|?|0)$ existiert nicht, $A_3(0|0|2)$.
Also ist E_1 parallel zur x_2-Achse, so dass auch die Spurgeraden mit der x_1x_2-Ebene und mit der x_2x_3-Ebene in x_2-Richtung zeigen (siehe Skizze):

$$s_{12}: \vec{X}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R}.$$

$$s_{13}: \vec{X}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix},\ \sigma\in\mathbb{R}.$$

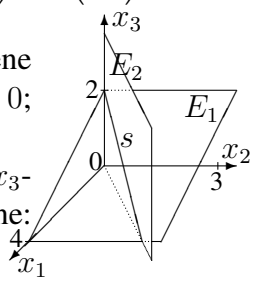
$$s_{23}: \vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \tau\in\mathbb{R}.$$

(Fortsetzung von 3 (b))
Achsenpunkte B_i von E_2 mit der x_i-Achse: $B_1(0|0|0)$, $B_2(0|0|0)$, $B_3(0|0|?)$: Alle Punkte B_3 liegen in E_2, d. h. E_2 enthält die x_3-Achse, die somit zugleich Spurgerade mit der x_1x_3- und der x_2x_3-Ebene ist:

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ r\in\mathbb{R}.$$

Für die Spurgerade mit der x_1x_2-Ebene benötigt man einen weiteren dort in E_2 liegenden Punkt, z. B. mit $(4|3|0)$: $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}$.

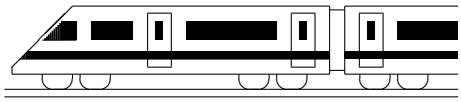
Spurpunkte von s:
Mit x_1x_2-Ebene $x_3=0$: $4-2\lambda=0$; $\lambda=2$; $S_{12}(4|3|0)$.
Analog mit x_1x_3- und x_2x_3-Ebene: $S_{13}=S_{23}(0|0|2)$.



4.
Lotgerade $l: \vec{X}=\begin{pmatrix}9\\2\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ in E: $9+\lambda-3(-5-3\lambda)=4$; $\lambda=-2$; $F(7|2|1)$.
Spiegelpunkt P': $\overrightarrow{FP'}=\overrightarrow{PF}$, also $\vec{P'}-\vec{F}=\vec{F}-\vec{P}$, also $\vec{P'}=2\vec{F}-\vec{P}$, also $P'(5|2|7)$.

5.
Bild analog ueb138.pdf. Ansatz für Ebene durch P senkrecht zu s mit Normalvektor = Ri.vektor der Geraden: $4x_1+3x_2-2x_3=d$.
P einsetzen: $4\cdot0+3\cdot0-2\cdot(-27)=d$, $d=54$, also Ebene: $E: 4x_1+3x_2-2x_3=54$.
s in E: $4(-4+4\lambda)+3(-3+3\lambda)-2(4-2\lambda)=54$; $\lambda=3$ in s einsetzen: $F(8|6|-2)$.
Abstand $d(P,g)=|\overline{PF}|=\sqrt{(8-0)^2+(6-0)^2+(-2+27)^2}=5\sqrt{29}$

6.
Allgemeinen Geradenpunkt in Kugelgleichung einsetzen: $(-4+4\lambda)^2+(-3+3\lambda)^2+(4-2\lambda+27)^2=729$ liefert quadratische Gleichung mit zwei Lösungen für λ.



CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg139.pdf

13. Klasse Lösungen | 13
Lagebeziehung Ebene – Ebene | 09

1.

(a) E_1 und E_2 schneiden sich (Normalvektoren sind nicht Vielfache).
$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \quad | \cdot 4$
$4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9 \quad |$
$12x_1 - 5x_2 = 33$
$x_1 = \lambda$
$12\lambda - 5x_2 = 33$, also $x_2 = 2{,}4\lambda - 6{,}6$
$2\lambda – (2{,}4\lambda – 6{,}6) – 2x_3 = 6$; $x_3 = 0{,}3 – 0{,}2\lambda$
Schnittgerade:
$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
Schnittwinkel: $\cos\varphi = \frac{|2\cdot 4 + (-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot 8|}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{16+1+64}} = \frac{7}{27}$; $\varphi \approx 74{,}97°$.

(b) E_1 und E_2 sind echt parallel (denn $E_2 | \cdot(-2)$ ergibt $2x_1 - x_2 - 2x_3 = -12$).
HNF von E_1: $|\vec{n}_1| = \sqrt{4+1+4} = 3$, also $E_1 : \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - 2x_3 - 6) = 0$.
Punkt auf E_2: $P(0|0|6)$. Abstand: $d(E_1, E_2) = |\frac{1}{3}(0 - 0 - 2\cdot 6 - 6)| = 6$.

(c) E_1 und E_2 sind identisch (denn Mult. der E_2-Gleichung mit 4 ergibt E_1).

2.

F muss in Ri. der Geraden und in Ri. des Normalvektors der Ebene E verlaufen, also Normalvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, und F enthält den Geraden-Aufpunkt $A(1|1|-1)$.
Ansatz: $F : 7x_1 - x_2 + 3x_3 = d$, A einsetzen: $7 - 1 - 3 = d$, also $F : 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$.

3.

(a) E_{BCT}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\sqrt{2} \\ 6\sqrt{6} \\ -6\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
Ansatz $18\sqrt{2}x_1 + 6\sqrt{6}x_2 - 6\sqrt{3}x_3 = d$, $B(-6|0|0)$ einsetzen: $d = -108\sqrt{2}$.
Division durch $6\sqrt{3}$ ergibt E_{BCT} : $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = -6\sqrt{6}$, also mit E_{ASC} paralleler Normalvektor.

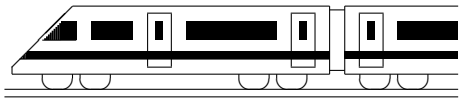
(b) Ansatz für die Parallelebene: $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = d$, Einsetzen von Q liefert $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = -6\sqrt{6}$.
Einsetzen von $B \rightarrow$ wahre Aussage.

(c) HNF von E_{ASD}: $|\vec{n}| = \sqrt{6+2+1} = 3$, also $E_{ASD} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = 0$.
HNF von $E_{ABS} : x_3 = 0$.
Für Punkte P mit gleichem Abstand von E_{ABS} und E_{ASD} gilt $d(P, E_{ABS}) = d(P, E_{ASD})$, also (mit HNF): $|\frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3)| = |x_3|$.
Winkelhalbierende Ebenen also:
$E_{W1} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = +x_3$, d. h. $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - 4x_3 = 0$ und
$E_{W2} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = -x_3$, d. h. $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2x_3 = 0$ (wobei $M \in E_{W2}$).

(d) D' wird als allgemeiner Geradenpunkt von p angesetzt: $D'(2 - \lambda | \sqrt{3}\lambda | 0)$.
$\overrightarrow{AD'} \perp \overrightarrow{SD'}$, also $\overrightarrow{AD'} \circ \overrightarrow{SD'} = 0$, also $(2-\lambda)\cdot(2-\lambda+3) + \sqrt{3}\lambda \cdot (\sqrt{3}\lambda - 3\sqrt{3}) + 0 = 0$, also $4\lambda^2 - 16\lambda + 10 = 0$.

(e) x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$. $E_{TDC} : x_3 = 2\sqrt{6}$.
Bei diesem unterbestimmten Gleichungssystem liegen x_2 und x_3 bereits fest. Frei wählbar ist also nur $x_1 = \lambda$.
Somit:
$YZ : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(f) $V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot$Volumen der Pyramide $ABCDT = 2 \cdot \frac{1}{3}$Grundfläche $\cdot$ Höhe, wobei Grundfläche = Quadratfläche und Höhe = Abstand des Punktes T von der Ebene E_{ABD} (mit Hilfe der HNF).
Volumen der Pyramide $ABYZT = $ $= \frac{1}{3}$ Trapez-Grundfläche $\cdot$ Höhe, wobei die Höhe wieder als Abstand des Punktes T von der Trapez-Ebene $x_2 = 0$ gesehen werden kann.
Der prozentuale Anteil wird dann als Bruch $\frac{V_{\text{Pyr}}}{V_{\text{Oktaeder}}}$ berechnet.



CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg130.pdf

13. Klasse Lösungen | 13
Steckbriefaufgabe, Optimierung | 10

1. Steigungsdreieck $m = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{2013-2014}{2012-2015} = \frac{1}{3}$. Ansatz also: $y = \frac{1}{3}x + t$
   P einsetzen: $2013 = \frac{1}{3} \cdot 2012 + t \Rightarrow t = 1342\frac{1}{3}$. Also Geradengl.: $y = \frac{1}{3}x + 1342\frac{1}{3}$.

2. Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, also $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

   Punkt $(1|-64)$, also $f(1) = -64$: $a + b + c + d = -64$.
   Waagrechte Tangente bei $x = 1$, also $f'(1) = 0$: $3a + 2b + c = 0$.
   Nullstelle $x = 5$, also $f(5) = 0$: $125a + 25b + 5c + d = 0$.
   Punkt $(0|-65)$, also $f(0) = -65$: $d = -65$.

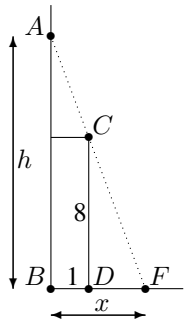
   Gleichungssystem nach Einsetzen von $d = -65$:

   $a + b + c = 1 \quad | \cdot(-1) \quad | \cdot(-5)$
   $3a + 2b + c = 0 \quad | \cdot 1$
   $125a + 25b + 5c = 65 \quad | \cdot 1$
   $2a + b = -1 \quad | \cdot(-20)$
   $120a + 20b = 60 \quad | \cdot 1$
   $80a = 80.$

   Also $a = 1$, also (aus $2a + b = -1$) $b = -3$, also (aus $a + b + c = 1$) $c = 3$.
   Somit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 65$.
   Nullstelle: $f(x) = 0$, $x_1 = 5$.
   $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1)$
   $= 3(x-1)^2 > 0$ für $x \neq 1$.
   f ist somit streng monoton und hat daher keine weiteren Nullstellen.

3. $f(x) = (x+a)e^{bx}$, also (Produktregel) $f'(x) = 1 \cdot e^{bx} + (x+a)e^{bx} \cdot b = (1+bx+ab)e^{bx}$.
   Punkt $(0, 1)$, also $f(0) = 1$: $ae^0 = 1$, also $a = 1$.
   Steigung bei $x = 0$ ist 3, also $f'(0) = 3$: $1 + ab = 3$.
   Einsetzen von $a = 1$ liefert $b = 2$. Also $f(x) = (x+1)e^{2x}$.

4. G: Zu minimieren: Leiterlänge $|\overline{AF}| = \sqrt{h^2 + x^2}$
   N: Dreieck ABF ähnlich zu Dreieck CDF, also $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BF}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{DF}|}$, d. h. $\frac{h}{x} = \frac{8}{x-1}$
   A: Aus N folgt $h = \frac{8x}{x-1}$, also $|\overline{AF}| = \sqrt{(\frac{8x}{x-1})^2 + x^2}$.
   Dieser Ausdruck wird minimal, wenn der Ausdruck unter der Wurzel $r(x) = (\frac{8x}{x-1})^2 + x^2 = \frac{64x^2}{(x-1)^2} + x^2 = \frac{64x^2+x^2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^4-2x^3+65x^2}{(x-1)^2}$ möglichst klein ist.

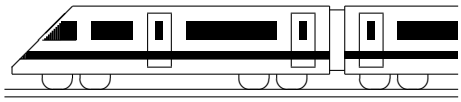
   D: $r'(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot (4x^3-6x^2+130x) - (x^4-2x^3+65x^2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x^3-3x^2+3x-65)}{(x-1)^3}$
   ($(x-1)$ kürzen, Zähler zusammenfassen, $2x$ ausklammern)

   E: $r'(x) = 0$ liefert $2x(x^3-3x^2+3x-65) = 0$, also $x_1 = 0$ oder $x^3-3x^2+3x-65 = 0$.
   Die Nullstelle von letzterem Polynom kann mit $x_2 = 5$ „geraten“ werden; weitere Nullstellen sind nicht vorhanden (→ Aufgabe 2).

$r' > 0$	$r' < 0$	$r' > 0$
steigt	0 fällt	5 steigt

   Also ist r und damit die Leiterlänge $|\overline{AF}|$ minimal für $x = 5$.

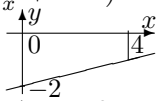
5. Zu optimierende Größe: $pq = p(1-p)$ (Damit ist bereits im ersten Schritt auch die Nebenbedingung $q = 1 - p$ und das Ausdrücken durch nur eine Variable geschehen).
   Umbenennung $x \leftrightarrow p$: $f(x) = x(1-x) = x - x^2$, $x \in [0; 1]$.
   Differenzieren: $f'(x) = 1 - 2x$. Extremwerte suchen: $f'(x) = 0$; $x = \frac{1}{2}$.
   Da es sich bei f um eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen 0 und 1 handelt, ist bei $x = \frac{1}{2}$, also bei $p = \frac{1}{2}$ das obige Produkt maximal (nämlich $p(1-p) = \frac{1}{4}$).
   Wegen des Wertebereichs $[0; 1]$ gibt es daneben noch Randminima bei $p = 0$ und $p = 1$ mit minimalem Wert $p(1-p) = 0$.



CC BY-SA: www.strobl-f.de/lsg13k.pdf

13. Klasse Lösungen | 13
Kompakt-Überblick zum Grundwissen | K

1.
(a) Bruch auseinanderziehen und $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ schreiben: $\int \frac{2x+1}{x^2}dx = \int(\frac{2}{x} + x^{-2})dx = = 2\ln|x| - x^{-1} + C$



(b) $\int_0^4(0{,}25x - 2)dx = [\frac{1}{8}x^2 - 2x]_0^4 = \frac{1}{8}\cdot 4^2 - 2\cdot 4 = -6$
Trapezfläche unterhalb der x-Achse.

2.
(a) $I(x) = [e^t - \frac{1}{2}t^2]_0^x = e^x - \frac{1}{2}x^2 - 1$,
$I'(x) = e^x - x$ (klar nach HdI),
$I''(x) = e^x - 1$, $I''(x) = 0$ ergibt $x = 0$.
$I'' < 0$ | $I'' > 0$ rechts- 0 links-gekrümmt
$I(0) = 0$, also WP$(0|0)$
(b) Schnittstellen: $f(x) = g(x)$; $\frac{1}{2}x^3 + x^2 = 0$; $x^2(\frac{1}{2}x + 1) = 0$; $x_{1/2} = 0$, $x_3 = -2$
$\int_{-2}^0(f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^0(\frac{1}{2}x^3 + x^2)dx = [\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3]_{-2}^0 = 0 - (2 - \frac{8}{3}) = \frac{2}{3}$

3.
X ist normalverteilt mit $\mu = 56$ und $\sigma = 1{,}5$.
$P(A) = P_{\mu,\sigma}(X > 60) = 0{,}00383$
$P(B) = P_{\mu,\sigma}(59{,}5 < X \le 60{,}5) = 0{,}00847$
$P(C) = 0$, $P(D) = P_{\mu,\sigma}(X < 55) = 0{,}25249$
σ-Regeln: $P_{\mu,\sigma}(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$, also $[t_1; t_2] \approx [52{,}1; 59{,}9]$

4.
$AB: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Einsetzen von C (erste Zeile $\lambda = -4$, zweite Zeile $\lambda = -1$), also liegt C nicht auf AB.
Abstand von $H(2|-7|2)$ von AB: Allg. Geradenpunkt $F(-\lambda|1-2\lambda|4-2\lambda)$. $\overrightarrow{HF} \circ \vec{u} = 0$; $(-\lambda-2)\cdot(-1) + (-2\lambda+8)\cdot(-2) + (-2\lambda+2)\cdot(-2) = 0$; $\lambda = 2$; Fußpunkt des Lots von H auf g: $F(-2|-3|0)$. Abstand: $|\overline{HF}| = \sqrt{16+16+4} = 6$

5.
$\vec{N} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{P})$, also $N(0|0{,}5|4)$.
$E_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

6.
$E_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
Normalvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, Ansatz $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und Einsetzen von A liefern:
$E_2: 12x_1 - 12x_2 + 6x_3 - 12 = 0$
$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{144+144+36} = 18$
HNF: $\frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2) = 0$
P in HNF: $d(P, E_2) = |\ldots| = \frac{2}{3}$
$l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
Kugelgleichung: $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 4)^2 = (\frac{2}{3})^2$

7.
Ri.vektoren nicht parallel; gleichsetzen:
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
Erste Zeile: $-1 + \lambda = -3$, $\lambda = -2$.
In zweite Zeile: $-2 = 10 + 4\mu$, $\mu = -3$.
Probe in dritter Zeile stimmt,
g und h_1 schneiden sich in $(-3|-2|4)$.
Schnittwinkel φ: $\varphi \approx 65{,}16°$, denn
$\cos\varphi = \frac{|\vec{u_1} \circ \vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|\cdot|\vec{u_2}|} = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 4 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{0+16+1}} \approx 0{,}42$

8.
E_3 ist parallel zur x_2-Achse.
Achsenpunkte sind $(?|0|0)$, $(0|?|0)$ und $(0|0|?)$, also $(2|0|0)$ mit x_1-Achse, $(0|0|-\frac{4}{7})$ mit x_3-Achse, kein Schnitt mit x_2-Achse.
Schnittwinkel ψ mit den Achsen: Mit Richtungsvektor $\vec{u}$ der x_1-Achse und Normalvektor $\vec{n}$ von E_3, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$, und $\sin\psi = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$ folgt $\psi \approx 15{,}95°$ mit x_1-Achse und analog $\psi \approx 74{,}05°$ mit x_3-Achse.

9.
„E_4 plus $2 \cdot E_5$“ liefert $7x_1 + 7x_3 = 7$; z. B. $x_1 = \tau$, dann $x_3 = 1 - \tau$, $x_2 = 4 - 2x_1 - 3x_3 = 1 + \tau$, also $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\tau \in \mathbb{R}$.

10.
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 12bx + c$
Max$(0|2)$ liefert $f(0) = 2$, d. h. $d = 2$
und $f'(0) = 0$, d. h. $c = 0$
Min: $f(\frac{4}{3}) = \frac{22}{27}$, d. h. $\frac{64}{27}a + \frac{16}{9}b + \frac{4}{3}c + d = \frac{22}{27}$
und $f'(\frac{4}{3}) = 0$, d. h. $3\cdot\frac{16}{9}a + 2\cdot\frac{4}{3}b + c = 0$
Der Punkt mit kleinstem Abstand von O sei $P(x|y)$. Suche Minimum von $d(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (x^3 - 2x^2 + 2)^2}$.