

|                                      |           |
|--------------------------------------|-----------|
| <b>13. Klasse TOP 10 Grundwissen</b> | <b>13</b> |
| <b>Lagebeziehung Ebene – Ebene</b>   | <b>09</b> |

| Betrachte Ebenengleichungen in Normalenform           |                                                              |                                  |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Gleichungen identisch<br>(d. h. bis auf einen Faktor) | Normalenvektor parallel,<br>aber Gleichungen nicht identisch | Normalenvektor<br>nicht parallel |
| identisch                                             | echt parallel                                                | schneiden sich                   |

Beispiele:

1.  $E : 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$  und  $F_1 : -4x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 34 = 0$  sind identisch.
2.  $E : 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$  und  $F_2 : -4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = -12$  sind echt parallel.
3.  $E : 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$  und  $F_3 : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4$  schneiden sich.

Zur Bestimmung der Schnittgerade eliminiert man (wenn nicht schon eine solche Gleichung vorliegt) eine Variable:

$$\begin{array}{rcl} E : & 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17 & | \cdot 2 \\ F_3 : & x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4 & | \\ (*) & \hline & 5x_1 - 8x_3 = 30 \end{array}$$

Da es sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem handelt (2 Gleichungen für 3 Variable), bedeutet die fehlende dritte Gleichung, dass man meist ( $\rightarrow$  ueb139.pdf, Aufgabe 3e) eine Variable frei wählen kann, d. h. man hat nun einen „Wunsch“ frei in Form eines Parameters, z. B.

$$\begin{aligned} x_3 &= \lambda \\ \text{in } (*): \quad x_1 &= 6 + \frac{8}{5}\lambda \\ \text{in } E: \quad x_2 &= 17 - 2x_1 + 5x_3 = 17 - 2(6 + \frac{8}{5}\lambda) + 5\lambda = 5 + \frac{9}{5}\lambda \end{aligned}$$

Die Schnittgerade lautet damit:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder etwas schöner} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### Schnittwinkel sich schneidender Ebenen

Falls sich die Ebenen schneiden, so berechnet man den Schnittwinkel aus den Normalenvektoren  $\vec{n}$  und  $\vec{n}'$  mit

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \circ \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$$

Beispiel:

Für die Ebenen  $E$  und  $F_3$  aus obigem Beispiel 3 ist  $\cos \varphi = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-5) \cdot 2|}{\sqrt{4+1+25} \cdot \sqrt{1+4+4}} \approx 0,6086$ , also  $\varphi \approx 52,51^\circ$ .

Ebenen schneiden sich senkrecht, wenn die Normalenvektoren aufeinander senkrecht stehen (also deren Skalarprodukt  $\vec{n} \circ \vec{n}' = 0$  ist).

### Abstand paralleler Ebenen

HNF einer Ebene bestimmen; beliebigen Punkt auf der anderen Ebene wählen (z. B. zwei Koordinaten beliebig, dritte aus der Ebenengleichung berechnen) und dessen Abstand von der anderen Ebene ermitteln.

Beispiel (mit den Ebenen  $E$  und  $F_2$  aus obigem Beispiel 2):

Bestimmung der HNF von  $E$ :  $|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$ . Also HNF von  $E$ :

$$\frac{1}{\sqrt{30}}(2x_1 + x_2 - 5x_3 - 17) = 0.$$

Beliebiger Punkt auf  $F_2$ , z. B. mit  $(?|0|0)$ :  $(3|0|0)$ . Einsetzen in den Term der HNF liefert den Abstand  $d(E, F_2) = \left| \frac{1}{\sqrt{30}}(6 - 17) \right| = \frac{11}{\sqrt{30}}$ .