

13. Klasse TOP 10 Grundwissen	13
Ebenengleichungen, Kugelgleichungen	05

Parameterform einer Ebene

Ebenen sind gegeben durch einen Aufpunkt A (mit Ortsvektor $\vec{A}$) auf der Ebene und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ müssen linear unabhängig sein (d. h. in verschiedene Richtungen zeigen, dürfen nicht Vielfache voneinander sein).¹

(Interpretation: Analog zu Geradengleichungen → grund134.pdf)

Fälle, in denen die Ebene E durch andere Stücke gegeben ist, führt man (eventuell mittels einer Skizze) auf die obige Punkt-Richtungs-Form zurück:

- E durch 3 Punkte A, B, C gegeben:
Aufpunkt A , Richtungsvektoren $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ und $\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A}$.
- E durch Gerade $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und Punkt $P \notin g$ gegeben:
Aufpunkt A , Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{AP} = \vec{P} - \vec{A}$.
- E durch sich schneidende Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$ gegeben:
Aufpunkt A , Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.
- E durch echt parallele Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$ gegeben:
Aufpunkt A , Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$.

Beispiel:

Durch die echt parallelen Geraden

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist die Ebene

$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Parameterfreie Form einer Ebene (Koordinatenform, Normalenform)

→ grund136.pdf Koordinatenform

Lagebeziehung Punkt – Ebene

Ob ein Punkt auf einer Ebenen liegt, wird durch Einsetzen des Punktes in die Ebenengleichung entschieden. Dies geht besonders bequem mit der Normalenform.²

Kugeln

Eine Kugel ist die Menge aller Punkte X , die vom Mittelpunkt M den gleichen Abstand r haben: $\overline{MX} = r$. Schreibweisen für die Gleichung einer Kugel sind also

$$(\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2.$$

Die Lage einer Geraden oder Ebene zu einer Kugel (z. B. Berührung) kann durch die Bestimmung des Abstands des Kugelmittelpunkts entschieden werden (→ grund134.pdf, grund136.pdf, ueb136.pdf, Aufgabe 4 (d), ueb138.pdf, Aufgabe 6).

¹Zwei linear abhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, bei denen ein Vektor sich als ein λ -faches des anderen darstellen lässt, heißen auch kollinear. Drei linear abhängige Vektoren liegen in einer Ebene und heißen auch komplanar.

²Mit der Parameterform ist dies analog zu Geraden → grund134.pdf möglich; dann muss man nach Einsetzen des Punktes aus zwei Gleichungen λ und μ bestimmen und die Probe in der dritten Gleichung machen.

