CC BY-SA: www.strobl-f.de/grund133.pdf

13. Klasse TOP 10 Grundwissen 13
Normalverteilung 03

Dichtefunktion f

Es müssen folgende Eigenschaften vorliegen: $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Stetige Zufallsgröße X

Es muss (analog zu Histogrammen → grund124.pdf) gelten:

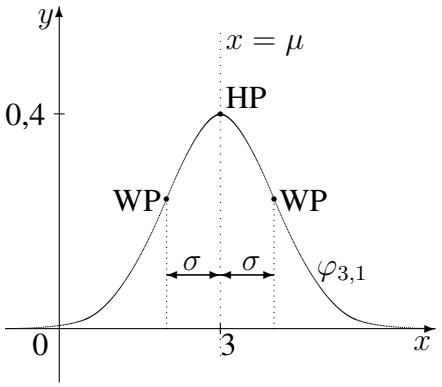
$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ mit einer Dichtefunktion f.

(Dagegen heißt eine Zufallsgröße mit nur einzelnen Werten diskret, z. B. wenn nur ganze Zahlen oder wie bei der Binomialverteilung nur endlich viele Werte sich ergeben können.)

Normalverteilungsdichte: Gaußsche Glockenfunktion

$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Eigenschaften:
Achsensymmetrie zu $x = \mu$
Hochpunkt $(\mu|\frac{1}{2\sigma^2})$
Wendestellen $x_{1/2} = \mu \pm \sigma$



(Fläche unter der Kurve: 1 = 100 %; man beachte, dass in der Abbildung hier die y-Achse anders skaliert ist als die x-Achse)

Für die Standardnormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ist der Hochpunkt ungefähr $(0|0{,}4)$

Normalverteilte Zufallsgröße X

mit Erwartungswert μ und Streuung (Standardabweichung) σ:

$P_{\mu,\sigma}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)dx$.

Kumulative Verteilungsfunktion ist die Integralfunktion

$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt = P(X \leq x)$.

(Bestimmung mit dem Taschenrechner).

Sigma-Regeln

Die Werte des $k \cdot \sigma$-Bereichs symmetrisch um den Erwartungswert stehen in Formelsammlungen/Dokument mit math. Formeln:

$$P_{\mu,\sigma}(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \approx \begin{cases} 0{,}683 & \text{für } k = 1 \\ 0{,}90 & \text{für } k = 1{,}64 \\ 0{,}954 & \text{für } k = 2 \end{cases}$$

Beispiel:

Die Abweichung der tatsächlichen Temperatur von der drei Tage zuvor vorhergesagten Temperatur in Grad Celsius sei normalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 2$.

P(„Es ist um mindestens 1 °C kälter als vorhergesagt“) $= P_{\mu=0,\sigma=2}(X \leq -1) = 0{,}69146$

P(„Die Temperatur weicht um mehr als 4 °C on der Vorhersage ab“)

$= P_{\mu=0,\sigma=2}(X < -4 \text{ oder } X > 4) = 1 - P_{\mu,\sigma}(0 - 2\sigma \leq X \leq 0 + 2\sigma) \approx 1 - 0{,}954 = 0{,}046$

Bei welcher Temperaturabweichung t könnte man sagen, dass sich in 5 % der Fälle eine im Vergleich zur Vorhersage um mehr als t °C wärmere Temperatur ergibt? Ansatz hierfür:

$P_{\mu=0,\sigma=2}(X > t) = 0{,}05$, aus Symmetriegründen also auch $P_{\mu=0,\sigma=2}(X < -t) = 0{,}05$, also Gegenereignis $P_{\mu=0,\sigma=2}(-t \leq X \leq t) = 0{,}90$.

Anwendung der Regel für den $1{,}64\sigma$-Bereich liefert $t = 1{,}64 \cdot \sigma = 3{,}28$.