



Bestimmung der Normalenform (Koordinatenform, parameterfreien Form) aus der Parameterform

Aus den drei Gleichungen der Parameterform werden die Parameter eliminiert.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl}
 E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} x_1 = 1 + \lambda + 2\mu \\ x_2 = 2 + 4\lambda + 3\mu \\ x_3 = 1 + 3\lambda + 5\mu \end{array} & \begin{array}{l} | \cdot (-4) \quad | \cdot (-3) \\ | \\ \hline -4x_1 + x_2 = -2 \quad -5\mu \quad | \\ -3x_1 + x_3 = -2 \quad -\mu \quad | \cdot (-5) \\ \hline E_1 : 11x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \end{array}
 \end{array}$$

Interpretation: Die Ebene besteht aus allen Punkten (x_1, x_2, x_3) , für die diese Gleichung gilt. Durch Einsetzen von Punktkoordinaten kann man also prüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Ebene liegt.

Es kann passieren, dass die parameterfreie Form schneller dasteht als man meint. Beispiele:

$$\begin{array}{rcl}
 E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ | \cdot (-1) \end{array} & \begin{array}{l} E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 E_2 : 2x_1 - x_2 = -2 \quad \text{fertig!} & & \begin{array}{l} x_1 = \dots \\ x_2 = 6 \quad E_3 \text{ fertig!} \end{array} \\
 E_2 \text{ ist eine zur } x_3\text{-Achse parallele Ebene.} & & E_3 \text{ ist eine zur } x_1x_3\text{-Ebene parallele Ebene.}
 \end{array}$$

Lotvektor und Lotfußpunkt

Die Koeffizienten in der Koordinatenform bilden einen Lotvektor zur Ebene.

In den obigen Beispielen sind $\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Normalenvektoren (also Vektoren, die auf der Ebene senkrecht stehen).

Um den Lotfußpunkt eines Punktes P auf einer Ebene E zu finden, stellt man die Lotgerade durch P mit Richtungsvektor \vec{n} auf (\vec{n} der Normalenvektor der Ebene E) und bestimmt den Schnittpunkt mit der Ebene (allgemeinen Geradenpunkt der Lotgerade in die Ebenengleichung einsetzen).

Bestimmung der Hesseschen Normalenform (HNF)

Man bestimmt die Länge des Normalenvektors, dividiert die Ebenengleichung durch diesen Wert und löst die Gleichung nach 0 auf (bringt also die Konstante auf die linke Seite); erhält die Konstante dabei ein positives Vorzeichen, so multipliziert man die Gleichung mit -1 .

Beispiel 1: $E_1 : 11x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$. $|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11^2 + 1 + (-5)^2} = \sqrt{147}$. Die HNF lautet somit $\frac{1}{\sqrt{147}}(11x_1 + x_2 - 5x_3 - 8) = 0$.

Beispiel 2: Die HNF der Ebene $E_2 : 2x_1 - x_2 = -2$ lautet $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_1 + x_2 - 2) = 0$.

Abstand Punkt – Ebene

Durch Einsetzen der Punktkoordinaten in der Term der HNF erhält man den Abstand des Punktes von der Ebene, wobei ein negatives Vorzeichen bedeutet, dass der Punkt im gleichen Halbraum wie der Ursprung $O(0|0|0)$ liegt (also auf der gleichen Seite der Ebene).

Beispiel:

Der Abstand des Punktes $P(3|-1|4)$ von der Ebene $E_1 : \frac{1}{\sqrt{147}}(11x_1 + x_2 - 5x_3 - 8) = 0$ ist $d(P, E_1) = \frac{4}{\sqrt{35}}$, und P und O liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene. Der Abstand des Nullpunkts O ist $d(O, E_1) = \frac{8}{\sqrt{147}}$. Der Punkt $Q(4|4|8)$ liegt auf der Ebene E_1 .