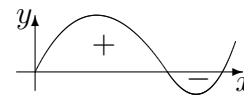


$A = \int_a^b f(x) dx$ kann veranschaulicht werden als **Fläche** unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$, genauer: als Flächenbilanz, wobei Flächen oberhalb der x -Achse positiv zählen, unterhalb der x -Achse negativ.



Integralanwendungen, z. B. Flächen zwischen zwei Kurven → grund132.pdf

Näherungsweise können Flächen auch durch Zerlegung in Streifen und die entsprechende Summe der Streifenflächen berechnet werden (→ ueb131.pdf, Aufgabe 1).

Zur Berechnung von $A = \int_a^b f(x) dx$:

Zuerst besorgt man sich eine **Stammfunktion** F , d. h. eine Funktion, deren Ableitung $F'(x)$ den Integranden f ergibt (weitere Hinweise → grund122.pdf, grund123.pdf, grund129.pdf und siehe unten; Hauptsatz und Begriff „Integralfunktion“ → grund132.pdf).

Beispiel: $f(x) = x^2 - 10$; dann ist $F(x) = \frac{x^3}{3} - 10x$ (Kontrolle durch Differenzieren!)

Nun wertet man die Stammfunktion aus durch Einsetzen „Obergrenze minus Untergrenze“:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Beispiel (Klammern setzen, Vorzeichen beachten!):

$$\int_{-1}^3 (x^2 - 10) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 10x \right]_{-1}^3 = \frac{3^3}{3} - 10 \cdot 3 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - 10 \cdot (-1) \right] = 9 - 30 + \frac{1}{3} - 10 = -\frac{92}{3}$$

Merke Stammfunktionen:

$f(x)$	1	x	x^2	x^n für $n \neq -1$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{N'(x)}{N(x)}$	$v'(x)e^{v(x)}$	$\sin x$
$F(x)$	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x $	$\ln N(x) $	$e^{v(x)}$	$-\cos x$

Hinweise und Tricks:

- Stammfunktionen sind nur bis auf eine additive Konstante eindeutig (→ grund122.pdf), eine Schreibweise ohne Grenzen bedeutet „Menge aller Stammfunktionen“.
- Produkte ausmultiplizieren, z. B. $\int x(x+3) dx = \int (x^2 + 3x) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$.
- Ausdrücke von der Sorte $\frac{1}{x^3}$ oder $\sqrt{x}$ kann man als x^{-3} bzw. $x^{\frac{1}{2}}$ schreiben und mit der x^n -Formel die Stammfunktion $-\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$ bzw. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ finden.
- Bei Brüchen mit einfachem Nenner ist es manchmal günstig, sie „auseinanderzuziehen“, z. B. bei $f(x) = \frac{3x^4+2x^2+x}{x^2} = \frac{3x^4}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} = 3x^2 + 2 + \frac{1}{x}$.

Also Stammfunktion: $F(x) = x^3 + 2x + \ln |x| + C$.

- In Prüfungsaufgaben steht die Stammfunktion manchmal schon da und man muss durch Differenzieren (→ grund122.pdf, grund127.pdf) lediglich nachweisen, dass es tatsächlich eine Stammfunktion ist, oder es steht in einer Formelsammlung/Dokument mit math. Formeln, z. B. $F(x) = -x + x \ln x$ als Stammfunktion von $f(x) = \ln x$.

Manchmal hat man in vorhergehenden Aufgaben Umformungen gemacht, die das Integrieren wesentlich erleichtern.

Beispiel: $f(x) = x - 1 - \frac{3}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)-3}{x+1} = \frac{x^2-4}{x+1}$,

also ist $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - 3 \ln |x+1|$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$.