12. Klasse TOP 10 Grundwissen (alter LP) — 12
Lagebeziehungen Gerade – Ebene — 09

Allgemeinen Geradenpunkt einsetzen in die Normalenform der Ebene		
Eindeutige Lösung	Typ $0 = 1$	Typ $0 = 0$
schneiden sich	echt parallel	Gerade liegt in der Ebene

Beispiel:

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad E : 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 = 60$$

Allgemeiner Geradenpunkt $G(2 + \lambda|1| - 3\lambda)$ in E: $15(2 + \lambda) + 12 \cdot 1 + 20 \cdot (-3\lambda) = 60$; $\lambda = -0{,}4$; g und E schneiden sich.
Schnittpunkt: λ in G einsetzen: $S(1{,}6|1|1{,}2)$.

Schnittwinkel von Gerade und Ebene
Falls sich Gerade und Ebene schneiden, so berechnet man den Schnittwinkel aus dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden und dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene mit

$$\sin\psi = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

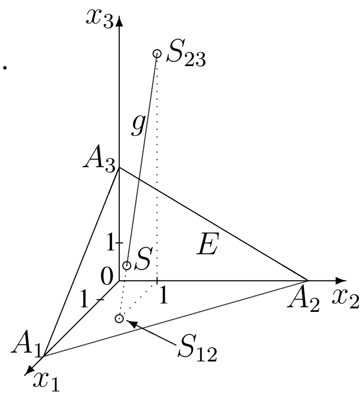
Beispiel: Für die obigen g, E ergibt sich $\sin\psi = \dfrac{|1 \cdot 15 + 0 \cdot 12 + (-3) \cdot 20|}{\sqrt{1+0+9} \cdot \sqrt{225+144+400}} \approx 0{,}51316$, also $\psi \approx 30{,}87°$.

Besondere Lage

- Gerade und Ebene schneiden sich senkrecht, wenn der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene parallel (also Vielfache voneinander) sind.
- Ist $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$, so sind Gerade und Ebene parallel (echt parallel oder zusammenfallend, kann entschieden werden durch Einsetzen des Aufpunkts der Geraden in die Ebene).

Abstand einer parallelen Gerade von einer Ebene
HNF der Ebene aufstellen; Abstand des Aufpunkts der Gerade von der Ebene bestimmen.

Achsenpunkte einer Ebene, Spurgeraden
Für Zeichnungen können die Achsenpunkte (Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen) und Spurgerade (Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen) nützlich sein.
Achsenpunkt mit der x_1-Achse: Punkte auf der x_1-Achse sind von der Bauart $A_1(x_1|0|0)$, Einsetzen in die Normalenform liefert x_1.
Für obige Ebene E ergibt sich: $A_1(4|0|0)$, $A_2(0|5|0)$, $A_3(0|0|3)$.
Spurgeraden können meist (→ ueb129.pdf) berechnet werden als Verbindungsgeraden der Achsenpunkte.
Für obige Ebene E ergibt sich z. B. als Spurgerade mit der x_1x_2-Ebene: $A_1A_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.



Spurpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen
ergeben sich als Schnittpunkte mit den Ebenen $x_3 = 0$ (x_1x_2-Ebene) usw. durch Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts.
Für obige Gerade g ergibt sich:
Mit x_1x_2-Ebene: G in $x_3 = 0$: $-3\lambda = 0$, $\lambda = 0$, also $S_{12}(2|1|0)$.
Mit x_1x_3-Ebene: G in $x_2 = 0$: $1 = 0$, kein Schnitt mit der x_1x_3-Ebene, g ist parallel dazu.
Mit x_2x_3-Ebene: G in $x_1 = 0$: $2 + \lambda = 0$, $\lambda = -2$, also $S_{23}(0|1|6)$.

Lot fällen (d. h. Punkt P auf Ebene E projizieren), P an E spiegeln → ueb129.pdf.

Lotfußpunkt eines Punktes P auf eine Gerade g → ueb129.pdf.