K 12 TOP 10 Grundwissen — 12
Berechnung von Wahrscheinlichkeiten — 7

Laplace-Verteilung

Sind alle Ergebnisse eines Zufallsversuchs gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

(Ω ist dabei der Grundraum, der alle möglichen Versuchsergebnisse beschreibt, Ereignisse A sind Teilmengen von Ω). Berechnung der Anzahlen $|A|$ bzw. $|\Omega|$ → TOP 10 K 12 Kombinatorik.

Beispiel: 3-mal Würfeln. A: „Drei verschiedene Augenzahlen“. $P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} \approx 0{,}556 = 55{,}6\,\%$

Hypergeometrische Verteilung: Urnenexperiment Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(A) = \frac{\binom{S}{s}\binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

n-mal ohne Zurücklegen

N Kugeln, davon S schwarze („Treffer“) $N-S$ weiße („Niete“)	→	Ereignis A: s schwarze $n-s$ weiße

Beispiel: Lottoformel

$N = 49$ Kugeln, davon $S = 6$, die wir angekreuzt haben. $n = 6$ Kugeln werden gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau $s = 4$ richtige gezogen werden, ist dann

$$P(\text{„4 Treffer“}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 903}{13\,983\,816} \approx 0{,}00097 = 0{,}097\,\%$$

Binomialverteilung: Urnenexperiment Ziehen mit Zurücklegen

Ein Bernoulli-Experiment (zwei Versuchsausgänge: Treffer und Niete, Trefferwahrscheinlichkeit p) wird n-mal unabhängig durchgeführt (Bernoulli-Kette der Länge n zum Parameter p). Die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer zu erhalten, ist dann

$$B(n, p; k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; Binomialverteilung → Stochastik-Tafelwerk).

n-mal mit Zurücklegen

„Treffer“ mit W. p „Niete“ mit W. $1-p$	→	Ereignis A: Genau k Treffer

Die Wahrscheinlichkeit, **höchstens** k Treffer zu erhalten, ist

$$B(n, p; 0) + B(n, p; 1) + \ldots + B(n, p; k) = \sum_{i=0}^{k} B(n, p; i)$$

(Verteilungsfunktion → Stochastik-Tafelwerk)

Beispiel: Bei einer bestimmten Telefon-Gesellschaft kommen 65 % aller Telefongespräche beim ersten Wählen zustande. Jemand muss 10 Gespräche erledigen. Treffer: „kommt durch“, $p = 0{,}65$, $n = 10$.
Betrachte A: „kommt genau einmal nicht durch“, B: „kommt mindestens fünfmal durch“.
A: d. h. genau 9 Treffer: $P(A) = B(10, 0{,}65; 9) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}65^9 \cdot 0{,}35 = 0{,}07249$ (oder Tafel).
B: Komplement $\overline{B}$: „höchstens vier Treffer“. $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}09493 = 0{,}90507$ (Tafel)

Rechenregeln für Und-, Oder- und Gegenereignisse

- Sind A und B **unabhängige** Ereignisse, so gilt für das Ereignis $A \cap B$ (A **und** B treten beide ein): $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- Bei Ereignissen $A \cup B$ („A oder B“, d. h. mindestens eines von beiden) ist
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ allgemein,
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls A und B disjunkt sind („unvereinbar“, d. h. keine gemeinsamen Elemente)
- Vor allem bei Ereignissen A vom Typ „mindestens ein …“ bietet sich an, das **Komplement** $\overline{A}$ (Gegenereignis, „kein …“) zu betrachten: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.