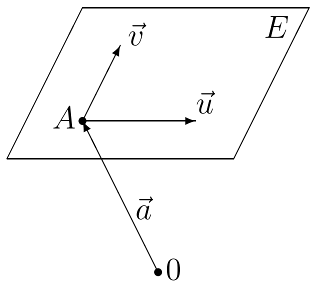
12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Ebenengleichungen — 06

Parameterform

Ebenen sind gegeben durch einen Aufpunkt A (mit Ortsvektor $\vec{A}$) auf der Ebene und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:



$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ müssen linear unabhängig sein (d. h. müssen in verschiedene Richtungen zeigen, dürfen nicht Vielfache voneinander sein).[1]

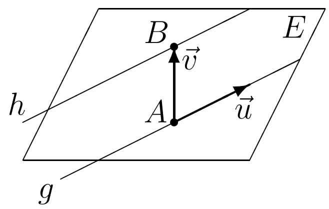
(Interpretation: Analog zu Geradengleichungen → grund125.pdf)

Fälle, in denen die Ebene E durch andere Stücke gegeben ist, führt man (eventuell mittels einer Skizze) auf die obige Punkt-Richtungs-Form zurück:

- E durch 3 Punkte A, B, C gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A}$.
- E durch Gerade $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ und Punkt $P \notin g$ gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\overrightarrow{AP} = \vec{P} - \vec{A}$.
- E durch sich schneidende Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu\vec{v}$ gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.
- E durch echt parallele Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu\vec{v}$ gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$.

Beispiel:
Durch die echt parallelen Geraden

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



ist die Ebene

$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Parameterfreie Form (Koordinatenform, Normalenform)
→ grund127.pdf Normalenform

Lagebeziehung Punkt – Ebene
Ob ein Punkt auf einer Ebenen liegt, wird durch Einsetzen des Punktes in die Ebenengleichung entschieden. Dies geht besonders bequem mit der Normalenform.[2]

---

[1] Zwei linear abhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, bei denen ein Vektor sich als ein λ-faches des anderen darstellen lässt, heißen auch kollinear. Drei linear abhängige Vektoren liegen in einer Ebene und heißen auch komplanar.

[2] Mit der Parameterform ist dies analog zu Geraden → grund125.pdf möglich; dann muss man nach Einsetzen des Punktes aus zwei Gleichungen λ und μ bestimmen und die Probe in der dritten Gleichung machen.