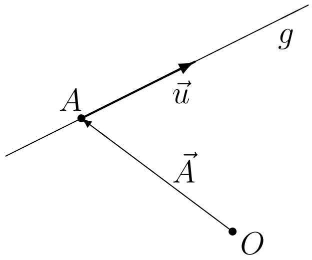
12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Geradengleichungen — 05

Punkt-Richtungs-Form

Geraden sind gegeben durch einen Aufpunkt A (mit Ortsvektor $\vec{A}$) auf der Geraden und einen Richtungsvektor $\vec{u}$:

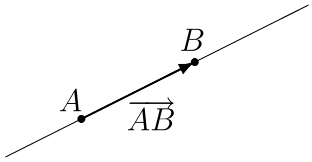


$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Interpretation: Die Gerade besteht aus allen Punkten $(x_1|x_2|x_3)$, deren Ortsvektor $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit einer Zahl λ als $\vec{A} + \lambda\vec{u}$ darstellbar ist)

Zwei-Punkte-Form

Gerade durch die Punkte A und B: Dann kann man z. B. A als Aufpunkt und $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ als Richtungsvektor wählen:



$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beispiel:
Gerade g durch $A(2|6|-1)$ und $B(-1|0|2)$:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1- & 2 \\ 0- & 6 \\ 2- & (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Als Richtungsvektor kann auch ein Vielfaches gewählt werden, also z. B.:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}.$$

Als Aufpunkt kann jeder andere Punkt auf der Geraden gewählt werden.

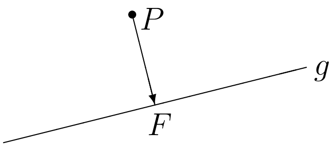
Lagebeziehung Punkt P – Gerade g

Ob P auf g liegt, wird durch Einsetzen des Punktes in die Geradengleichung entschieden.
Beispiel:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- $P(5|12|-4)$ liegt auf g, denn: $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow \lambda = 3$; Probe: passt!; Probe: passt!
- $Q(1|4|3)$ liegt nicht auf g (siehe ueb125.pdf, Aufgabe 1)

Lotfußpunkt F eines Punktes P auf eine Gerade g; Abstand Punkt P – Gerade g



F als allgemeinen Geradenpunkt aufstellen; $\overrightarrow{PF} \perp \vec{u}$, wobei $\vec{u}$ der Richtungsvektor der Geraden ist.
Der Abstand der Punktes P von der Geraden g ist dann der Abstand von P und F.

Beispiel:

$$P(1|-1|4),\ g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ansatz: Allgemeiner Geradenpunkt $F(7+2\lambda|2+\lambda|-2-5\lambda)$.

$$\overrightarrow{PF} \perp \vec{u}: \begin{pmatrix} 7+2\lambda-1 \\ 2+\lambda-(-1) \\ -2-5\lambda-4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 0.\ (6+2\lambda)\cdot 2 + (3+\lambda) + (-6-5\lambda)\cdot(-5) = 0.$$

$45 + 30\lambda = 0$. $\lambda = -1{,}5$. Einsetzen in Ansatz für F liefert Lotfußpunkt $F(4|0{,}5|5{,}5)$.
Abstand des Punktes P von der Geraden g:

$$d(P,g) = \overline{PF} = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{13{,}5} \approx 3{,}67.$$