12. Klasse TOP 10 Grundwissen (alter LP) — 12
Erwartungswert, Binomialverteilung — 03

Zufallsvariablen ordnen jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zu.
Zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln dem Ergebnis $(3;6)$ die Anzahl der 2er, hier $X((3;6)) = 0$.
Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(X = a)$ die jeweiligen Werte a auftreten.
Zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln für die Anzahl X der 2er:

a	0	1	2
$P(X=a)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Der **Erwartungswert** $\mu = E(X)$ gibt einen mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten gewichteten Mittelwert an: $\mu = E(X) = \sum\limits_a a \cdot P(X = a)$.
Die **Varianz** $\sigma^2 = V(X)$ und die **Streuung (Standardabweichung)** $\sigma = \sqrt{V(x)}$ sind Maße für die mittlere quadrierte Abweichung vom Mittelwert: $\sigma^2 = V(X) = \sum\limits_a (a-\mu)^2 \cdot P(X=a)$.
In obigem Beispiel: $\mu = E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = \frac{1}{3}$,
$\sigma^2 = V(X) = (0 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{25}{36} + (1 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{10}{36} + (2 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$.

Wichtig zum Verständnis der Formeln für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist der **Binomialkoeffizient**, der angibt, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus n Objekten eine Teilmenge von k Stück (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Taschenrechner: nCr-Taste.
Zum Beispiel Lotto 6 aus 49: $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!\,6!} = 13\,983\,816$

Hypergeometrische Verteilung: Urnenexperiment Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(A) = \frac{\binom{S}{s}\binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

n-mal ohne Zurücklegen

N Kugeln, davon S schwarze („Treffer“) $N-S$ weiße („Niete“)

Ereignis A:
s schwarze
$n-s$ weiße

Binomialverteilung: Urnenexperiment Ziehen mit Zurücklegen
Ein Bernoulli-Experiment (zwei Versuchsausgänge: Treffer und Niete, Trefferwahrscheinlichkeit p) wird n-mal unabhängig durchgeführt (Bernoulli-Kette der Länge n zum Parameter p). Die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer zu erhalten, ist dann

$$B(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(Binomialverteilung → Stochastik-Tafel).

n-mal mit Zurücklegen

„Treffer“ mit W. p „Niete“ mit W. $q = 1-p$

Ereignis A:
Genau k Treffer

Die Wahrscheinlichkeit, **höchstens** k Treffer zu erhalten, ist

$$B(n;p;0) + B(n;p;1) + \ldots + B(n;p;k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$$

(Verteilungsfunktion → Stochastik-Tafel)

Beispiel 1: Bei einer bestimmten Telefon-Gesellschaft kommen 96 % aller Telefongespräche beim ersten Wählen zustande. Jemand muss 10 Gespräche erledigen. Treffer: „kommt durch“, $p = 0{,}96$, $n = 10$.
Betrachte A: „kommt genau einmal nicht durch“, B: „kommt mindestens achtmal durch“.
A: d. h. genau 9 Treffer: $P(A) = B(10; 0{,}96; 9) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}96^9 \cdot 0{,}04 = 0{,}27701$ (oder Tafel).
B: Komplement $\overline{B}$: „höchstens sieben Treffer“. $P(B) = P_{n=10,p=0{,}96}(k \geq 8) = 1 - P_{n=10,p=0{,}96}(k \leq 7) = 1 - 0{,}00621 = 0{,}99379$ (Tafel)
Beispiel 2: Wie oft muss das Experiment durchgeführt werden, um mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit **mindestens einmal** nicht durchzukommen, wenn die W. hierfür 0,04 beträgt?
Hier notiert man einen Ansatz („Soll gelten: $P_{n=?,p=0{,}04}(k \geq 1) \geq 0{,}90$“), geht zum Komplement über („$P_{n=?,p=0{,}04}(k = 0) \leq 1 - 0{,}90$, d. h. $0{,}96^n \leq 0{,}10$“) und löst die entstehende Exponentialgleichung durch beidseitiges Logarithmieren („$n \ln 0{,}96 \leq \ln 0{,}10$, d. h. $n \geq \frac{\ln 0{,}10}{\ln 0{,}96} \approx 56{,}4$, also $n \geq 57$“).

Für binomialverteilte Zufallsvariablen gilt $\mu = E(X) = np$ und $\sigma^2 = npq = np(1-p)$.