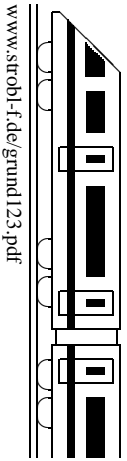


<b>12. Klasse TOP 10 Grundwissen</b>	<b>12</b>
<b>Erwartungswert, Binomialverteilung</b>	<b>03</b>



**Zufallsvariablen** ordnen jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zu.  
Zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln dem Ergebnis (3; 6) die Anzahl der 2er, hier  $X((3; 6)) = 0$ .

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $P(X = a)$  die jeweiligen Werte  $a$  auftreten.

Zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln für die Anzahl  $X$  der 2er:

$a$	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Der **Erwartungswert**  $\mu = E(X)$  gibt einen mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten gewichteten Mittelwert an:  $\mu = E(X) = \sum_a a \cdot P(X = a)$ .

Die **Varianz**  $\sigma^2 = V(X)$  und die **Streuung (Standardabweichung)**  $\sigma = \sqrt{V(x)}$  sind Maße für die mittlere quadrierte Abweichung vom Mittelwert:  $\sigma^2 = V(X) = \sum_a (a - \mu)^2 \cdot P(X = a)$ .

In obigem Beispiel:  $\mu = E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = \frac{1}{3}$ ,  
 $\sigma^2 = V(X) = (0 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{25}{36} + (1 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{10}{36} + (2 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$ .

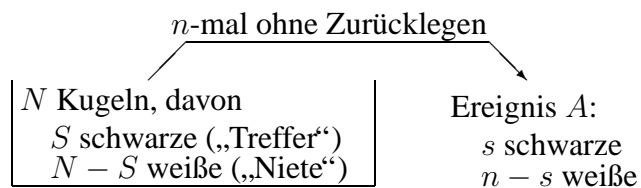
Wichtig zum Verständnis der Formeln für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist der **Binomialkoeffizient**, der angibt, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus  $n$  Objekten eine Teilmenge von  $k$  Stück (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Taschenrechner: nCr-Taste.  
Zum Beispiel Lotto 6 aus 49:  
 $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!6!} = 13\,983\,816$

**Hypergeometrische Verteilung: Urnenexperiment Ziehen ohne Zurücklegen**

$$P(A) = \frac{\binom{S}{s} \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

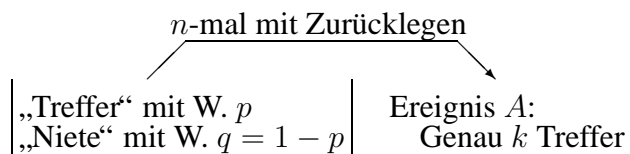


**Binomialverteilung: Urnenexperiment Ziehen mit Zurücklegen**

Ein Bernoulli-Experiment (zwei Versuchsausgänge: Treffer und Niete, Trefferwahrscheinlichkeit  $p$ ) wird  $n$ -mal unabhängig durchgeführt (Bernoulli-Kette der Länge  $n$  zum Parameter  $p$ ). Die Wahrscheinlichkeit, genau  $k$  Treffer zu erhalten, ist dann

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(Binomialverteilung → Stochastik-Tafel).



Die Wahrscheinlichkeit, **höchstens**  $k$  Treffer zu erhalten, ist

$$B(n; p; 0) + B(n; p; 1) + \dots + B(n; p; k) = \sum_{i=0}^k B(n; p; i)$$

(Verteilungsfunktion → Stochastik-Tafel)

**Beispiel 1:** Bei einer bestimmten Telefon-Gesellschaft kommen 96 % aller Telefongespräche beim ersten Wählen zustande. Jemand muss 10 Gespräche erledigen. Treffer: „kommt durch“,  $p = 0,96$ ,  $n = 10$ .

Betrachte  $A$ : „kommt genau einmal nicht durch“,  $B$ : „kommt mindestens achtmal durch“.

$A$ : d. h. genau 9 Treffer:  $P(A) = B(10; 0,96; 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,96^9 \cdot 0,04 = 0,27701$  (oder Tafel).

$B$ : Komplement  $\bar{B}$ : „höchstens sieben Treffer“.  $P(B) = P_{n=10, p=0,96}(k \geq 8) = 1 - P_{n=10, p=0,96}(k \leq 7) = 1 - 0,00621 = 0,99379$  (Tafel)

**Beispiel 2:** Wie oft muss das Experiment durchgeführt werden, um mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit **mindestens einmal** nicht durchzukommen, wenn die W. hierfür 0,04 beträgt?

Hier notiert man einen Ansatz („Soll gelten:  $P_{n=?, p=0,04}(k \geq 1) \geq 0,90$ “), geht zum Komplement über („ $P_{n=?, p=0,04}(k = 0) \leq 1 - 0,90$ , d. h.  $0,96^n \leq 0,10$ “) und löst die entstehende Exponentialgleichung durch beidseitiges Logarithmieren („ $n \ln 0,96 \leq \ln 0,10$ , d. h.  $n \geq \frac{\ln 0,10}{\ln 0,96} \approx 56,4$ , also  $n \geq 57$ “).

Für binomialverteilte Zufallsvariablen gilt  $\mu = E(X) = np$  und  $\sigma^2 = npq = np(1 - p)$ .