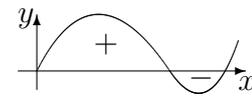
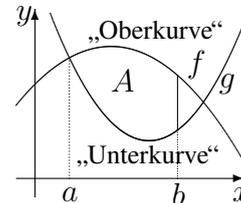


$A = \int_a^b f(x) dx$ kann veranschaulicht werden als **Fläche** unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$, genauer: als Flächenbilanz, wobei Flächen oberhalb der x -Achse positiv zählen, unterhalb der x -Achse negativ.



Flächen zwischen zwei Kurven:

„Oberkurve minus Unterkurve“: $A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$



Näherungsweise können Flächen auch durch Zerlegung in Streifen und die entsprechende Summe der Streifenflächen berechnet werden (→ ueb121.pdf, Aufgabe 1).

Zur Berechnung von $A = \int_a^b f(x) dx$:

Zuerst besorgt man sich eine **Stammfunktion** F , d. h. eine Funktion, deren Ableitung $F'(x)$ den Integranden f ergibt (weitere Hinweise → grund112.pdf, grund117.pdf, grund118.pdf und siehe unten; Hauptsatz und Begriff „Integralfunktion“ → grund122.pdf).

Beispiel: $f(x) = x^2 - 10$; dann ist $F(x) = \frac{x^3}{3} - 10x$ (Kontrolle durch Differenzieren!)

Nun wertet man die Stammfunktion aus durch Einsetzen „Obergrenze minus Untergrenze“:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Beispiel (Klammern setzen, Vorzeichen beachten!):

$$\int_{-1}^3 (x^2 - 10) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 10x \right]_{-1}^3 = \frac{3^3}{3} - 10 \cdot 3 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - 10 \cdot (-1) \right] = 9 - 30 + \frac{1}{3} - 10 = -\frac{92}{3}$$

Merke Stammfunktionen:

| | | | | | | | | |
|--------|-----|-----------------|-----------------|-----------------------|------------------------|----------------------|-----------------|-----------|
| $f(x)$ | 1 | x | x^2 | x^n für $n \neq -1$ | $\frac{1}{x} = x^{-1}$ | $\frac{N'(x)}{N(x)}$ | $v'(x)e^{v(x)}$ | $\sin x$ |
| $F(x)$ | x | $\frac{x^2}{2}$ | $\frac{x^3}{3}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\ln x $ | $\ln N(x) $ | $e^{v(x)}$ | $-\cos x$ |

Tricks:

- Ausdrücke von der Sorte $\frac{1}{x^3}$ oder \sqrt{x} kann man als x^{-3} bzw. $x^{\frac{1}{2}}$ schreiben und mit der x^n -Formel die Stammfunktion $-\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$ bzw. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ finden.
- Bei Brüchen mit einfachem Nenner ist es manchmal günstig, sie „auseinanderzuziehen“, z. B. bei $f(x) = \frac{3x^4+2x^2+x}{x^2} = \frac{3x^4}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} = 3x^2 + 2 + \frac{1}{x}$.
Also Stammfunktion: $F(x) = x^3 + 2x + \ln |x|$.
- In Prüfungsaufgaben steht die Stammfunktion manchmal schon da und man muss durch Differenzieren (→ grund116.pdf) lediglich nachweisen, dass es tatsächlich eine Stammfunktion ist.

Manchmal hat man in vorhergehenden Aufgaben Umformungen gemacht, die das Integrieren wesentlich erleichtern.

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1} = (x^2 - 4) : (x + 1) = x - 1 - \frac{3}{x+1}$ (Polynomdivision!)

Also Stammfunktion: $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - 3 \ln |x + 1|$.