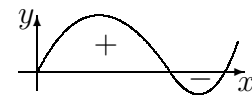
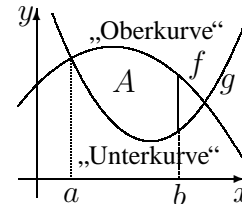


$A = \int_a^b f(x) dx$  kann veranschaulicht werden als **Fläche** unter dem Graphen von  $f$  zwischen  $x = a$  und  $x = b$ , genauer: als Flächenbilanz, wobei Flächen oberhalb der  $x$ -Achse positiv zählen, unterhalb der  $x$ -Achse negativ.



Flächen zwischen zwei Kurven:

„Oberkurve minus Unterkurve“:  $A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$



Näherungsweise können Flächen auch durch Zerlegung in Streifen und die entsprechende Summe der Streifenflächen berechnet werden (→ ueb121.pdf, Aufgabe 1).

**Zur Berechnung von  $A = \int_a^b f(x) dx$ :**

Zuerst besorgt man sich eine **Stammfunktion**  $F$ , d. h. eine Funktion, deren Ableitung  $F'(x)$  den Integranden  $f$  ergibt (weitere Hinweise → grund112.pdf, grund116.pdf, grund117.pdf und siehe unten; Hauptsatz und Begriff „Integralfunktion“ → grund122.pdf).

Beispiel:  $f(x) = x^2 - 10$ ; dann ist  $F(x) = \frac{x^3}{3} - 10x$  (Kontrolle durch Differenzieren!)

Nun wertet man die Stammfunktion aus durch Einsetzen „Obergrenze minus Untergrenze“:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Beispiel (Klammern setzen, Vorzeichen beachten!):

$$\int_{-1}^3 (x^2 - 10) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 10x \right]_{-1}^3 = \frac{3^3}{3} - 10 \cdot 3 - \left[ \frac{(-1)^3}{3} - 10 \cdot (-1) \right] = 9 - 30 + \frac{1}{3} - 10 = -\frac{92}{3}$$

**Merke Stammfunktionen:**

$f(x)$	1	$x$	$x^2$	$x^n$ für $n \neq -1$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{N'(x)}{N(x)}$	$v'(x)e^{v(x)}$	$\sin x$
$F(x)$	$x$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x $	$\ln N(x) $	$e^{v(x)}$	$-\cos x$

**Tricks:**

- Ausdrücke von der Sorte  $\frac{1}{x^3}$  oder  $\sqrt{x}$  kann man als  $x^{-3}$  bzw.  $x^{\frac{1}{2}}$  schreiben und mit der  $x^n$ -Formel die Stammfunktion  $-\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$  bzw.  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  finden.
- Bei Brüchen mit einfachem Nenner ist es manchmal günstig, sie „auseinanderzuziehen“, z. B. bei  $f(x) = \frac{3x^4+2x^2+x}{x^2} = \frac{3x^4}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} = 3x^2 + 2 + \frac{1}{x}$ .  
Also Stammfunktion:  $F(x) = x^3 + 2x + \ln|x|$ .
- In Prüfungsaufgaben steht die Stammfunktion manchmal schon da und man muss durch Differenzieren (→ grund115.pdf) lediglich nachweisen, dass es tatsächlich eine Stammfunktion ist.

Manchmal hat man in vorhergehenden Aufgaben Umformungen gemacht, die das Integrieren wesentlich erleichtern.

Beispiel:  $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1} = (x^2 - 4) : (x + 1) = x - 1 - \frac{3}{x+1}$  (Polynomdivision!)

Also Stammfunktion:  $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - 3 \ln|x + 1|$ .