12. Klasse TOP 10 Grundwissen (alter LP) — 12
Lagebeziehungen Ebene – Ebene — 10

Betrachte Ebenengleichungen in Normalenform		
Gleichungen identisch (d. h. bis auf einen Faktor)	Normalenvektor parallel, aber Gleichungen nicht identisch	Normalenvektor nicht parallel
identisch	echt parallel	schneiden sich

Beispiele:

1. $E : 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$ und $F_1 : -4x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 34 = 0$ sind identisch.
2. $E : 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$ und $F_2 : -4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = -12$ sind echt parallel.
3. $E : 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$ und $F_3 : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4$ schneiden sich.
   Zur Bestimmung der Schnittgerade eliminiert man (wenn nicht schon eine solche Gleichung vorliegt) eine Variable:
   $$\begin{array}{rl|l} E: & 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17 & \cdot 2 \\ F_3: & x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4 & \\ \hline (*) & 5x_1 \qquad - 8x_3 = 30 & \end{array}$$
   Da es sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem handelt (2 Gleichungen für 3 Variable), bedeutet die fehlende dritte Gleichung, dass man meist (→ ueb120.pdf, Aufgabe 3e) eine Variable frei wählen kann, d. h. man hat nun einen „Wunsch" frei in Form eines Parameters, z. B.
   $$\begin{array}{rrcl} & x_3 & = & \lambda \\ \text{in } (*): & x_1 & = & 6 + \frac{8}{5}\lambda \\ \text{in } E: & x_2 & = & 17 - 2x_1 + 5x_3 = 17 - 2(6 + \frac{8}{5}\lambda) + 5\lambda = 5 + \frac{9}{5}\lambda \end{array}$$
   Die Schnittgerade lautet damit:
   $$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder etwas schöner} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel sich schneidender Ebenen

Falls sich die Ebenen schneiden, so berechnet man den Schnittwinkel aus den Normalenvektoren $\vec{n}$ und $\vec{n}'$ mit
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n} \circ \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$$

Beispiel:
Für die Ebenen E und F_3 aus obigem Beispiel 3 ist $\cos\varphi = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + (-5)\cdot 2|}{\sqrt{4+1+25}\cdot\sqrt{1+4+4}} \approx 0{,}6086$, also $\varphi \approx 52{,}51°$.

Ebenen schneiden sich senkrecht, wenn die Normalenvektoren aufeinander senkrecht stehen (also deren Skalarprodukt $\vec{n} \circ \vec{n}' = 0$ ist).

Abstand paralleler Ebenen

HNF einer Ebene bestimmen; beliebigen Punkt auf der anderen Ebene wählen (z. B. zwei Koordinaten beliebig, dritte aus der Ebenengleichung berechnen) und dessen Abstand von der anderen Ebene ermitteln.

Beispiel (mit den Ebenen E und F_2 aus obigem Beispiel 2):
Bestimmung der HNF von E: $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$. Also HNF von E: $\frac{1}{\sqrt{30}}(2x_1 + x_2 - 5x_3 - 17) = 0$.
Beliebiger Punkt auf F_2, z. B. mit $(?|0|0)$: $(3|0|0)$. Einsetzen in den Term der HNF liefert den Abstand $d(E, F_2) = |\frac{1}{\sqrt{30}}(6 - 17)| = \frac{11}{\sqrt{30}}$.