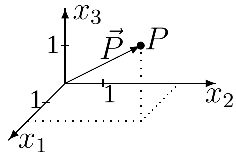
11. Klasse TOP 10 Grundwissen — 11
Koordinatengeometrie: Vektoren — 09

Koordinaten und Vektoren

Zum Punkt $P(2|3|2)$ zeigt vom Nullpunkt (Ursprung) $O(0|0|0)$ der **Ortsvektor** $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

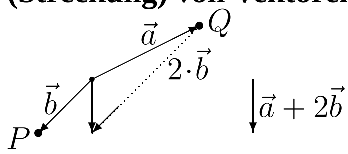


Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Punkte A, B: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ („Spitze minus Fuß")

Addition (Aneinanderhängen) und S-Multiplikation (Streckung) von Vektoren

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dann ist $\vec{a} + 2 \cdot \vec{b} =$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



Subtraktion von Vektoren liest man am besten als „Reise" längs der Vektoren, z. B. $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{b} + \vec{a}$ ist eine Reise längs $\vec{b}$ rückwärts und anschließend längs $\vec{a}$ vorwärts, in obiger Skizze kommt man so von P nach Q, also $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{PQ}$.

Mittelpunkt M der Strecke $[AB]$: $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$

Länge eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Abstand zweier Punkte = Länge des Verbindungsvektors

Beispiel: $A(1|-1|4)$, $B(3|2|-2)$. $d(A,B) = |\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-(-1))^2 + (-2-4)^2} = 7$.

Kugeln

Eine Kugel ist die Menge aller Punkte X, die vom Mittelpunkt M den gleichen Abstand r haben: $\overline{MX} = r$. Schreibweisen für die Gleichung einer Kugel sind also

$$(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Beispiel:

Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\cos\varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-5) \cdot 2}{\sqrt{4+1+25} \cdot \sqrt{1+4+4}} \approx -0{,}6086$, also $\varphi \approx 127{,}49°$.

Aufeinander senkrecht stehende Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$: $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \circ \vec{v} = 0$

Vektorprodukt

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor, der sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-5) \\ 10-3 \\ 1-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Länge dieses Vektors ist die Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms, entsprechend $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ die Dreiecksfläche.

Das Volumen des von drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Spats ist gegeben durch $V_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$, das Pyramidenvolumen entsprechend $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$.