

**Grundbegriffe** (→ grund85.pdf und → ueb119.pdf, Aufgabe 1):

Alle möglichen Versuchsergebnisse eines Zufallsexperiments werden als Elemente eines **Grundraums**  $\Omega$  zusammengefasst, dessen Teilmengen  $E$  die sog. **Ereignisse** sind. Jedem Ereignis  $E$  ist seine **Wahrscheinlichkeit**  $P(E)$  zugeordnet. Diese Zuordnung  $P$  muss die **Kolmogorow-Axiome** erfüllen, aus denen die folgenden **Rechenregeln** folgen:

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \quad \text{und} \quad P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

### Verknüpfte Ereignisse, Schreib- und Sprechweisen

$\bar{E}$  (Komplement, Gegenereignis, nicht- $E$ )

$E_1 \cap E_2$  ( $E_1$  und  $E_2$ , **beide** Ereignisse treten ein)

$E_1 \cup E_2$  ( $E_1$  oder  $E_2$ ; mindestens eines der Ereignisse tritt ein).

(In der Mathematik dürfen bei „oder“ auch beide Ereignisse eintreten, sofern nichts anderes dasteht).

$\overline{E_1 \cap E_2} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$  (Höchstens eines der Ereignisse tritt ein)

$\overline{E_1 \cup E_2} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$  (keines der Ereignisse tritt ein)

$(\bar{E}_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap \bar{E}_2)$  (Genau eines der beiden Ereignisse tritt ein)

$E_1 \cap E_2 = \{\}$  ( $E_1$  und  $E_2$  sind unvereinbar, disjunkt)

### Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse  $A, B$  heißen unabhängig, falls  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

### Hinweise

- Falls  $A$  und  $B$  unabhängig sind, so gilt dies auch für die Komplemente.
- Wichtig ist die richtige Bildung von Komplementen, Beispiel:  
{„Mindestens ein Treffer“} = {„Kein Treffer“}.
- Für **Laplace-Experimente** gilt  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$   
(→ grund85.pdf).
- Mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich oft (zumindest gedanklich) mit Baumdiagrammen veranschaulichen und mit den Pfadregeln berechnen (→ grund97.pdf).
- Für Zufallsexperimente mit Betrachtung von Ereignissen  $A$ /nicht- $A$  und  $B$ /nicht- $B$  eignet sich oft neben dem Baumdiagramm eine Vierfeldertafel, mit denen sich bedingte Wahrscheinlichkeiten  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  berechnen lassen (→ grund104.pdf).
- Nach dem Gesetz der großen Zahlen pendelt sich bei  $n$ -maliger unabhängiger Durchführung desselben Zufallsexperiments die relative Häufigkeit eines Ereignisses für  $n \rightarrow \infty$  bei  $P(E)$  ein (→ grund65.pdf).

### Beispiel:

Ein Oktaeder (beschriftet mit 1–8) und ein Würfel (1–6) werden unabhängig nacheinander geworfen. Betrachtet werden die Ereignisse

$A$ : „Oktaeder zeigt eine Zahl  $\geq 3$ “,

$B$ : „Würfel zeigt eine Zahl  $\geq 3$ “,

$C$ : „Würfel zeigt eine Zahl  $\leq 2$ “,

$D$ : „Beide zeigen eine Zahl  $\geq 3$ “,

$E$ : „Oktaeder oder Würfel zeigt eine Zahl  $\geq 3$ “,

$F$ : „Höchstens einer zeigt eine Zahl  $\geq 3$ “,

$G$ : „Keiner zeigt eine Zahl  $\geq 3$ “,

$H$ : „Genau einer zeigt eine Zahl  $\geq 3$ “,

$I$ : „Augensumme 12“,

$J$ : „Oktaeder zeigt Primzahl“.

$$P(I) = P(„66, 75, 84“) = \frac{3}{8 \cdot 6} = \frac{1}{16}.$$

$$P(I \cap J) = P(„75“) = \frac{1}{8 \cdot 6} = \frac{1}{48} \neq \frac{1}{32} = P(I) \cdot P(J), \text{ also } I \text{ und } J \text{ abhängig.}$$

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(D) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2},$$

$$P(E) = P(A \cup B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{12}$$

$$P(F) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

$$P(G) = P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{1}{12}$$

$$P(H) = P((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) =$$

$$= P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) =$$

$$= P(\bar{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\bar{B}) = \frac{5}{12}.$$

$$P(J) = P(„2, 3, 5, 7“) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$