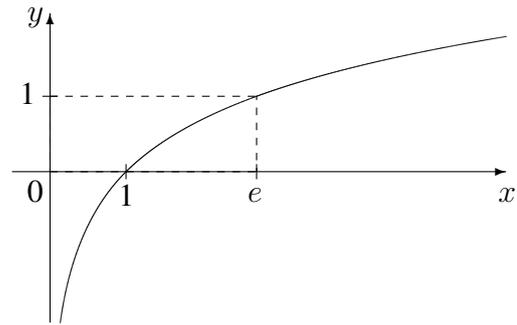


$f(x) = \ln x$ („Natürliche Logarithmusfunktion“)



1. Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[$
(im \ln sind nur Werte > 0 erlaubt)

Wertebereich: $W_f = \mathbb{R}$

2. Spezielle Werte:

$$f(1) = \ln 1 = 0 \text{ (Nullstelle),}$$

$$f(e) = \ln e = 1 \text{ (} e \approx 2,718 \text{ Eulersche Zahl)}$$

3. Rechenregeln ($a, b > 0, n \in \mathbb{R}$):

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln(a^n) = n \ln(a)$$

Dadurch ergeben sich oft Vereinfachungen, z. B.

$$\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \ln x - \ln(x^2 + 1), \ln(e^2) = 2 \ln e = 2, \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln 1 - \ln e = -1$$

4. Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \rightarrow \infty, \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \rightarrow -\infty$ (d. h. die y -Achse ist Asymptote)

Die \ln -Funktion konvergiert schwächer als jedes Polynom, also

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

5. Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{x}$

6. Steht im \ln nicht einfach x (Beispiel: $g(x) = \ln(1 - 2x)$), so muss dies berücksichtigt werden

- beim Definitionsbereich: $g(x) = \ln(1 - 2x)$ ist definiert, wenn $1 - 2x > 0$ ist, d. h. $x < \frac{1}{2}$, also $D_g =]-\infty; \frac{1}{2}[$
- beim Differenzieren: $g'(x) = \frac{1}{1-2x} \cdot (-2) = \frac{-2}{1-2x}$
(„1 durch das Innere mal das Innere nachdifferenziert“)

7. Stammfunktionen: $K(x) = \ln|x| + C$ ist Stammfunktion von $k(x) = \frac{1}{x}$
(siehe Formelsammlung/
Merkhilfe) $K_1(x) = \ln|v(x)| + C$ ist Stammfunktion von $K_1(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$
 $F(x) = x \ln x - x + C$ ist Stammfunktion von $f(x) = \ln x$

8. Term der Umkehrfunktion: e^x

Somit ist $e^{\ln x} = x$ und $\ln e^x = x$.

9. Lösen von Exponentialgleichungen durch beidseitiges Logarithmieren: Beispiel aus der Stochastik:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{6}\right)^n &< 0,01 & | \ln \quad (\text{und Rechenregeln!}) \\ n \ln \frac{5}{6} &< \ln 0,01 & | : \ln \frac{5}{6} \quad (< 0) \quad (!) \\ n &> \frac{\ln 0,01}{\ln \frac{5}{6}} \approx 25,3 \end{aligned}$$

10. Lösen von Gleichungen vom Typ $\ln(1 - 2x) = 3$: Beidseitiges Anwenden der e -Funktion liefert $e^{\ln(1-2x)} = e^3$, also $1 - 2x = e^3$, somit $x = \frac{1}{2}(1 - e^3)$

11. Die \ln -Funktion ist die Logarithmusfunktion zur Basis e ($\ln x = \log_e x$).

Für die allgemeine \log -Funktion $h_a(x) = \log_a x, x > 0$, zur Basis $a > 0$ gilt (Basis-Umwandlung!) $h_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ und daher $h'_a(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$ (siehe Formelsammlung/Merkhilfe).