

$f(x) = e^x$ („Natürliche Exponentialfunktion“)

1. Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$ (alle x -Werte sind erlaubt)

Wertebereich: $W_f =]0; \infty[$
 (es ist $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
 somit besitzt die e -Funktion keine Nullstellen)

2. Spezielle Werte:

$f(0) = e^0 = 1$ (Schnitt mit der y -Achse),
 $f(1) = e^1 = e \approx 2,718$ (Eulersche Zahl e)

Taschenrechner: Meist SHIFT-ln.

Beispiel: $e^{0,5} \approx 1,649$, $e = e^1 \approx 2,718$

3. Es gelten die bekannten Potenz-Rechenregeln,

also z. B. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{2+x} = e^2 \cdot e^x$, $e^{2x} = (e^x)^2$

4. Grenzwerte:

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \rightarrow \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (d. h. die negative x -Achse ist Asymptote)

Die e -Funktion konvergiert stärker als jedes Polynom, also

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \rightarrow \infty$

5. Ableitung: $f'(x) = e^x$ („Die e -Funktion reproduziert sich.“)

Somit ist $f'(x) > 0$, d. h. der Graph steigt streng monoton.

6. Ist der Exponent nicht einfach x , so muss beim Differenzieren nachdifferenziert werden. Beispiel:

$$g(x) = e^{-2x}, \quad g'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$$

(„ e -Funktion reproduziert sich mal das Innere (also $-2x$) nachdifferenziert“)

7. Stammfunktion: $F(x) = e^x + C$ ist Stammfunktion von $f(x) = e^x$.

$$F_1(x) = e^{v(x)} + C \text{ ist Stammfunktion von } f_1(x) = v'(x)e^{v(x)}.$$

8. Term der Umkehrfunktion: $\ln x$

Somit ist $e^{\ln x} = x$ und $\ln e^x = x$.

9. Lösen von Exponentialgleichungen durch beidseitiges Logarithmieren: Beispiel:

$$\begin{aligned} e^x &= 2 & | \ln \\ x &= \ln 2 \end{aligned}$$

10. Lösen von Gleichungen mit Produkt vom Typ $(3x + 4)e^{x-1} = 0$:

Da e^{\dots} stets positiv ist, kann man beide Seiten der Gleichung durch e^{\dots} dividieren (in obigem Beispiel steht dann $3x + 4 = 0$ als leicht zu lösende Gleichung).

11. Für die allgemeine Exponentialfunktion $h_a(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, Basis $a > 0$, gilt $h_a(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$ und daher $h'_a(x) = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x$.

Somit ist $h'_a(0) = \ln a$ und die Eulersche Zahl $e \approx 2,718$ als Basis der natürlichen Exponentialfunktion ist diejenige, bei der $h'_e(0) = 1$ gilt.

